ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}

Α1 α -Λ , δ - Σ , ε -Λ , στ- Σ , ζ -Λ , η - Σ , θ- Λ , ι - Σ , κ - Σ

Α2 - δ

Α3 -β

Α4 - γ

Α5 α – Λ ,β -Σ

Α6 -γ

Α7-δ

Α8-δ

Α9-δ

Α10 Σωστό

Α11 – α

Α12 – γ

Α13 – α

Α14Λάθος

Α15 – δ

Α16 – β

Α17-γ

Α18α – Λ , β – Λγ – Λ, δ – Λ , ε – Λ , στ – Σ

Α19 – β

Α20-δ

Α21–δ

Α22 – α – Σ , β - Σ

Α23 – β

Α24 – δ

Α25– γ

Α26 – α

B1)

Σωστό το β.

Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την ελαστική κεντρική κρούση τους είναι:

Της m_1: $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

Της m_2: $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

Όμως δόθηκε ότι οι ταχύτητες αυτές είναι αντίθετες και ίσου μέτρου. Άρα

$$\upsilon_1' = -\upsilon_2' \Leftrightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow m_1 - m_2 = -2m_1 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{m_2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

B2)

A. Σωστό το γ

B. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο για την πλαστική κρούση. Είναι:

$$\vec{P}_{ολ}^{(πριν)} = \vec{P}_{0λ}^{(μετα)} \Rightarrow m \cdot u = (M + m)\, V_K \Leftrightarrow$$

$$V_K = \frac{m \cdot \upsilon}{M + m} = \frac{m \cdot \upsilon}{2m + m} \Rightarrow$$

$$V_K = \frac{\upsilon}{3}$$

B3)

α

Από ΑΔΟ:

$$m\upsilon_1 - 4m\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{4}\ (1)$$

$$E_{απ.} = \Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}4m\upsilon_2^2 \xrightarrow{(1)} E_{απ.} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}4m\frac{\upsilon_1^2}{16} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2\right) = \frac{5}{4}K_1$$

B4)

α

Όταν $m_A = m_B$

$u'_B = u_A$ και $u'_A = 0$

Άρα $\Pi\% = \dfrac{K_{B_{ΤΕΛ}}}{K_{A_{ΑΡΧ}}}100\% = 100\%$

Β5)	**γ** $\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά}$ $p_1 - p_2 = p_{ολ}$ $p_1 - p_2 = 0$ Άρα $p_1 = p_2$
Β6)	Έστω υ η ταχύτητα της σφαίρας Α πριν την κρούση. Τότε η κινητική της ενέργεια είναι: $K_A = \frac{1}{2}mυ^2$ (1) Από την διατήρηση της ορμής του συστήματος κατά την κρούση υπολογίζουμε την ταχύτητα V_K του συσσωματώματος. $\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετα} \Leftrightarrow mυ + 0 = 2mV_K \Leftrightarrow V_K = \frac{υ}{2}$ (2) Έτσι η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι: $K_{συσ} = \frac{1}{2}2mV_K^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} K_{συσ} = m\left(\frac{υ}{2}\right)^2 \Leftrightarrow K_{συσ} = \frac{1}{4}mυ^2$ (3) Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι $K_{συσ} = \frac{1}{2}K_A$.
Β7)	Από την διατήρηση της ορμής του συστήματος κατά την κρούση έχουμε: $\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετα} \Leftrightarrow mυ_1 + 0 = mυ_1' + mυ_2' \Leftrightarrow υ_2' = υ_1 - υ_1'$ (1) Από την διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την ελαστική κεντρική κρούση έχουμε: $K_{πριν} = K_{μετα} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mυ_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mυ_1'^2 + \frac{1}{2}mυ_2'^2 \Leftrightarrow$ $υ_2'^2 = υ_1^2 - υ_1'^2 \Leftrightarrow υ_2'^2 = (υ_1 - υ_1')(υ_1 + υ_1')$ (2) Με διαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (2) και (1) έχουμε: $\frac{υ_2'^2}{υ_2'} = \frac{(υ_1 - υ_1')(υ_1 + υ_1')}{(υ_1 - υ_1')} \Leftrightarrow υ_2' = υ_1 + υ_1'$ (3) Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (3) έχουμε: $2υ_2' = 2υ_1 \Leftrightarrow \mathbf{υ_2' = υ_1}$ (4) Και η (3) λόγω της (4) δίνει: $υ_1 = υ_1 + υ_1' \Leftrightarrow \mathbf{υ_1' = 0}$

B8) β

Αφού η κρούση είναι μετωπική και ελαστική και τα σώματα έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι το Σ_1 θα παραμείνει ακίνητο, μετά την κρούση και επομένως θα μεταφερθεί στο Σ_2 όλη η κινητική του ενέργεια.

B9)

Σωστό το α.

Κατά την ελαστική κεντρική κρούση κινούμενης σφαίρας μάζας m_1 σε ακίνητη μάζας m_2, μετά την κρούση η m_1 έχει ταχύτητα που υπολογίζεται από τον τύπο

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

Για την m_1 δόθηκε ότι μετά την κρούση επιστρέφει πίσω με ταχύτητα μέτρου ίσου με το 1/5 της αρχικής της τιμής. Δηλαδή δόθηκε ότι

$$\upsilon_1' = -\frac{1}{5}\upsilon_1 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{1}{5}\upsilon_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(m_1 - m_2) = -(m_1 + m_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5m_1 - 5m_2 = -m_1 - m_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6m_1 = 4m_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{2}}.$$

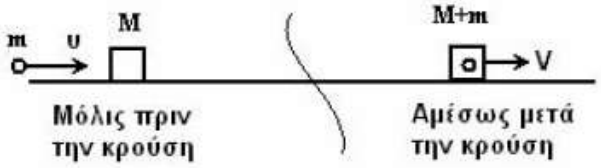
B10) γ

Από ΑΔΟ: $p_A + p_B = p'_A + p'_B$ ή $m_A4 + m_B2 = m_A(-2) + m_B6$ ή $6m_A = 4m_B$ ή

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{2}{3}$$

B11)

Σωστή απάντηση είναι η **β** ($\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$).



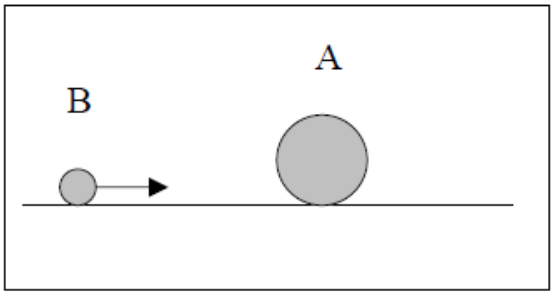
$$\text{Α.Δ.Ο.} \Rightarrow m\upsilon = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m\upsilon}{m+M} \quad (1)$$

και

$$K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \frac{1}{3}K_{\pi\rho\iota\nu} \rightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2}m\upsilon^2 \xrightarrow{(1)} \frac{m}{M+m} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{2}$$

B12)

Σωστό το α

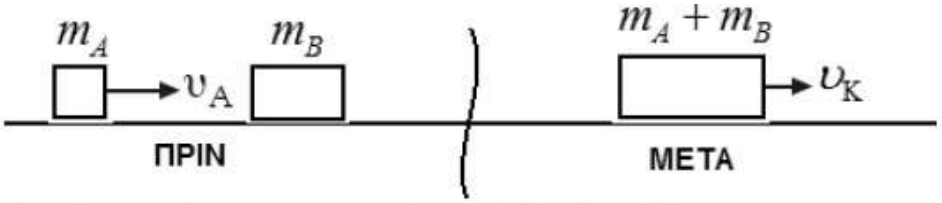


Από την εξίσωση του σχ. βιβλίου σελ. 156 ,θέτοντας $m_1 = m$ και $m_2 = 3m$ προκύπτει:

$$u_1 = \frac{m-3m}{m+3m}u = \frac{-2m}{4m}u = -\frac{u}{2}$$

B13)

β - $\Delta K = -\frac{m_A \upsilon_A^2}{3}$



Αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά):

$$m_A\upsilon_A = (m_A + m_B)\upsilon_K \xrightarrow{m_B = 2m_A} m_A\upsilon_A = 3m_A\upsilon_K \rightarrow \upsilon_K = \frac{\upsilon_A}{3} \quad (1)$$

$$\Delta K = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\upsilon_K^2 - \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 \xrightarrow{(1)}$$

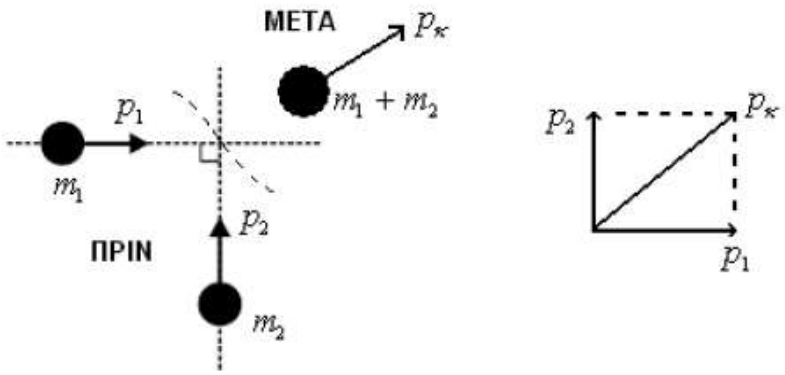
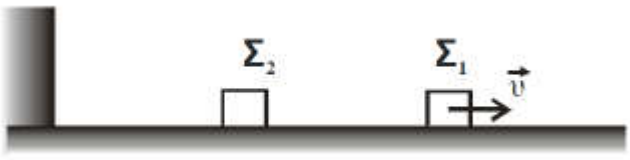
$$\Delta K = \frac{1}{2}3m_A\frac{\upsilon_A^2}{9} - \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 = \frac{1}{6}m_A\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 \rightarrow \Delta K = -\frac{m_A\upsilon_A^2}{3}$$

B14) γ

Από τις διατήρηση της ορμής του συστήματος έχουμε:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow m\upsilon + 0 = 0 + 2mV \Leftrightarrow V = \frac{\upsilon}{2} \quad (1)$$

Πριν την κρούση έχουμε:

	$K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ (2) Και μετά από αυτήν $K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}2mV^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2 \Leftrightarrow K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}2m\frac{\upsilon^2}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{4}m\upsilon^2$ (3) Από την (2) και (3) έχουμε $K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} < K_{\pi\rho\iota\nu}$
Β15)	β  Αρχή διατήρησης της ορμής: $\Sigma\vec{p}_{\Pi\Rho\Iota\Nu} = \Sigma\vec{p}_{\Mu\Epsilon\Tau\Alpha} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_\kappa \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}} p_\kappa = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \rightarrow$ $\rightarrow (m_1+m_2)\cdot\upsilon_\kappa = \sqrt{m_1\upsilon_1^2 + m_2\upsilon_2^2} \rightarrow \upsilon_\kappa = 2m/s$ Οπότε η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση θα είναι: $K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\kappa^2 \rightarrow K = 10J$.
Β16)	α  Επειδή τα σώματα είναι όμοια θα έχουν και ίσες μάζες. Κάθε κρούση είναι κεντρική και ελαστική, επομένως: **Κρούση 1η** : Τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες δηλαδή το Σ_1 ακινητοποιείται ενώ το Σ_2 κατευθύνεται προς τον τοίχο με ταχύτητα υ.

Κρούση 2η : Το σώμα Σ_2 συγκρούεται ελαστικά με το τοίχωμα και ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

Κρούση 3η : Το σώμα Σ_2 κατά την επιστροφή του ανταλλάσει ταχύτητα με το ακίνητο Σ_1, έτσι το Σ_2 ακινητοποιείται ενώ το Σ_1 κινείται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που ξεκίνησε.

Β17)

Α.Δ.Ο.

$$(m_1+m_2)\upsilon+O=O+(m_2+4m_1)\frac{\upsilon}{3}\Leftrightarrow$$

$$m_1\,\upsilon+m_2\,\upsilon=m_2\frac{\upsilon}{3}+4m_1\frac{\upsilon}{3}\Leftrightarrow$$

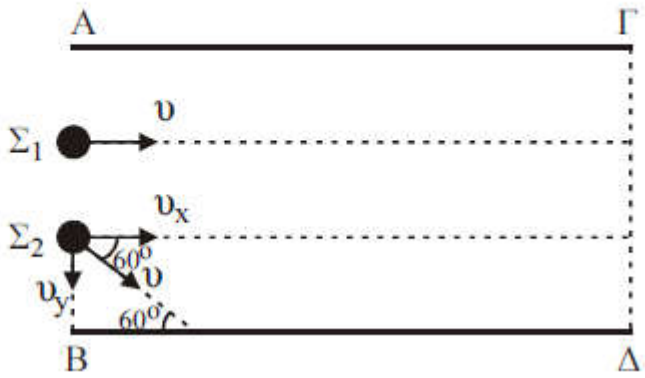
$$m_1\,\upsilon-\frac{4}{3}m_1\,\upsilon=m_2\frac{\upsilon}{3}-m_2\,\upsilon\Leftrightarrow$$

$$m_1=2m_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=2$$

Οπότε η σωστή απάντηση είναι η α..

Β18)

Σωστό το α.



Η σφαίρα Σ_1 κινείται ευθύγραμμα και ομαλά από το ΑΒ μέχρι το ΓΔ και άρα ισχύει:

$$A\Gamma=\upsilon\cdot t_1\Rightarrow t_1=\frac{A\Gamma}{\upsilon}\qquad(1)$$

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ της σφαίρα Σ_2 στις συνιστώσες υ_x, υ_y.
Για τη διαδρομή ΑΓ ισχύει:

$$\upsilon_x=\upsilon\cdot\text{συν}60^\circ\Rightarrow\upsilon_x=\frac{\upsilon}{2}$$

Και $A\Gamma=\upsilon_x\cdot t_2\Rightarrow A\Gamma=\frac{\upsilon\cdot t_2}{2}\Rightarrow t_2=\frac{2A\Gamma}{\upsilon}$ (2)

Από την (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{2A\Gamma}{\upsilon}}{\frac{A\Gamma}{\upsilon}}=2\Rightarrow t_2=2t_1.$$

Άρα σωστό το α.

Σημείωση: Η σφαίρα Σ_2 δέχεται από τους τοίχους δυνάμεις κάθετες στην διεύθυνση της συνιστώσας ταχύτητας της $\vec{\upsilon}_x$. Για αυτό διατηρείται το μέτρο της ταχύτητας αυτής σταθερό.

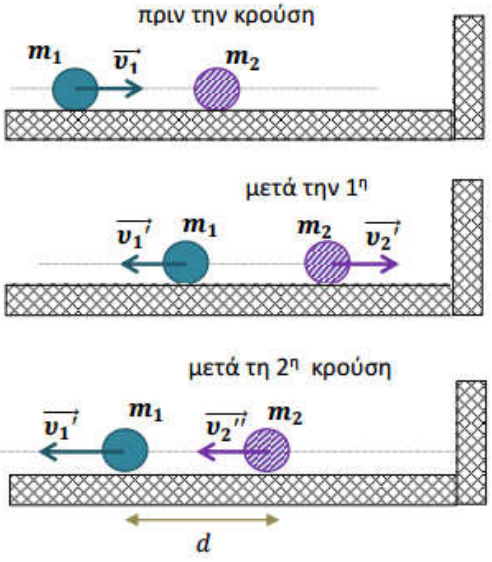
B19)

Σωστή απάντηση: iii) $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}$

Έστω υ_1', υ_2' οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την ελαστική κρούση των m_1-m_2. Γνωρίζουμε ότι:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1<0 \quad (1)$$

$$\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \qquad (2)$$



Για την ελαστική κρούση m_2 με τον τοίχο ισχύει:
$\upsilon_2''=-\upsilon_2'$
Όμως η απόσταση των m_1, m_2 είναι σταθερή.
Οπότε $\upsilon_1'=\upsilon_2''\Rightarrow\upsilon_1'=-\upsilon_2'$

$$\Rightarrow\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=-\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow m_1-m_2=-2m_1\Rightarrow 3m_1=m_2\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{3}.$$

Οι υ_1' , υ_2', υ_2'' είναι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων.

B20) Σωστό το α.

$$\left.\begin{aligned}K_A&=\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2\\K_B&=\frac{1}{2}m_B\upsilon_B^2\\K_A&=K_B\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2=\frac{1}{2}4m_A\upsilon_B^2\Rightarrow\upsilon_A^2=4\upsilon_B^2\Rightarrow\upsilon_A=2\upsilon_B\Rightarrow\upsilon_B=\frac{\upsilon_A}{2}=\frac{\upsilon_1}{2}$$

+

Σχήμα 1.

Θεωρούμε θετική φορά προς τα αριστερά

Κατά την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$P_{αρχ}=P_{τελ}=>m_B\upsilon_B-m_A\upsilon_A=(m_A+m_B)V=>V=\frac{m_B\upsilon_B-m_A\upsilon_A}{m_A+m_B}=\frac{4m_A\frac{\upsilon_1}{2}-m_A\upsilon_1}{m_A+4m_A}=\frac{m_A\upsilon_1}{5m_A}=\frac{\upsilon_1}{5}$$

Β21)

Σωστό το i.

β. Για τις ταχύτητες των σωμάτων έχουμε: Από το διάγραμμα του σχήματος 4 και για την $\mathbf{m_1}$:

Πριν την κρούση: $\upsilon_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8-0}{4-0} = 2\ \frac{m}{s}$.

Μετά την κρούση: $\upsilon_1' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-8}{12-4} = -1\ \frac{m}{s}$.

Από το διάγραμμα του σχήματος 5 και για την $\mathbf{m_2}$:

Πριν την κρούση: επειδή x=σταθ=> $\upsilon_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$

Μετά την κρούση: $\upsilon_2' = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16-8}{12-4} = \frac{8}{8} = 1\ \frac{m}{s}$

Αφού μετά την κρούση είναι $\upsilon_1 \neq \upsilon_2$ η κρούση δεν είναι πλαστική.

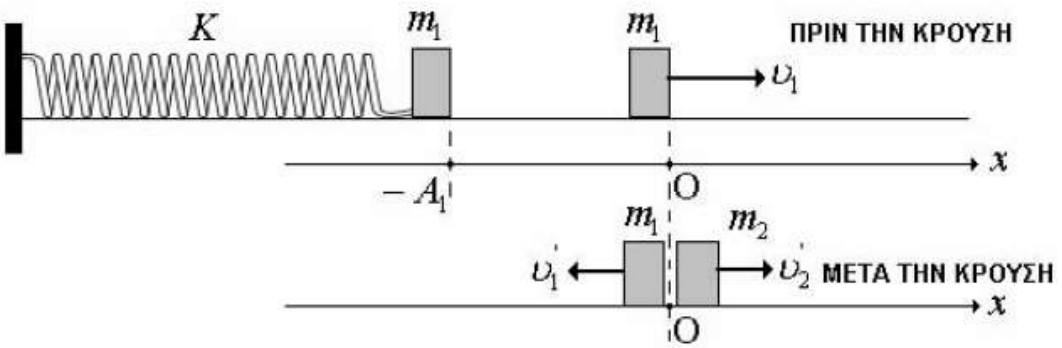
Από την διατήρηση της ορμής του συστήματος κατά την κρούση έχουμε:

$$\text{ΑΔΟ}: m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \rightarrow m_2 = m_1\frac{(\upsilon_1 - \upsilon_1')}{(\upsilon_2' - \upsilon_2)}m_1 = 1\frac{2+1}{1} = 3\ kg$$

$$\left.\begin{array}{l} K = K_1 + K_2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{4}{2} + 0 = 2\ J \\ K' = K_1' + K_2' = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{6} = 2\ J \end{array}\right\} \rightarrow K = K' \rightarrow \boxed{i}$$

Αφού $\mathbf{K_{πριν} = K_{μετά}}$ η κρούση είναι ελαστική.

Γ1)



α. Το σύστημα ελατήριο – σώμα Σ_1 είναι αρμονικός ταλαντωτής με

$$D = K \rightarrow m_1 \cdot \omega^2 = K \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m_1}} \xrightarrow{S.I.} \omega = 10\ rad/s$$

και $T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$, οπότε $\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega \cdot A_1 \rightarrow \upsilon_1 = 2m/s$.

β. Κεντρική ελαστική κρούση με $\upsilon_2 = 0$. Για τις ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση ισχύουν:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_1' = \frac{1-3}{1+3} \cdot 2 \rightarrow \upsilon_1' = -1m/s \text{ (αλλάζει η φορά).}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_2' = \frac{2 \cdot 1}{1+3} \cdot 2 \rightarrow \upsilon_2' = 1m/s.$$

γ. Το Σ_1 θα εκτελεί Α.Α.Τ. με νέο πλάτος:

$$K_{max} = U_{max} \rightarrow \frac{1}{2} m \upsilon_1^{'2} = \frac{1}{2} K A_1^{'2} \rightarrow A_1^{'} = \frac{|\upsilon_1^{'}|}{\omega} \xrightarrow{S.I.} A_1^{'} = 0,1m$$

Θα ισχύει: $x = A_1^{'} \eta\mu(\omega t + \phi_0)$. Ως $t_0 = 0$ θεωρούμε τη λήξη της κρούσης (τη στιγμή αμέσως μετά....).

Οπότε για $t_0 = 0$ έχουμε $0 = A_1^{'} \cdot \eta\mu\phi_0 \rightarrow \eta\mu\phi_0 = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 0 \\ \phi_0 = \pi \ rad \end{cases}$

Επιλέγουμε τη λύση $\phi_0 = \pi \ rad$ γιατί εκείνη τη στιγμή η ταχύτητα έχει αρνητική φορά. Οπότε η ζητούμενη εξίσωση στο S.I. θα είναι:
$x = 0,1\eta\mu(10t + \pi)\ m$ ή $x = -0,1\eta\mu(10t)\ m$.

δ. Το Σ_1 ακινητοποιείται για $2^{η}$ φορά στη θέση $x = +A_1^{'} = 0,1m$ και αυτό γίνεται τη στιγμή:

$$t = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = 3\frac{T}{4} \rightarrow t = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{5} \rightarrow t = \frac{3\pi}{20} s$$

την ίδια στιγμή το Σ_2, που κινείται ομαλά, απέχει από τη θέση $x = 0$:

$$x_2 = \upsilon_2^{'} \cdot t \rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{20} m \text{ ή } x_2 \square 0,47m$$

Οπότε η μεταξύ τους απόσταση θα είναι:
$\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow \Delta x = 0,37m$

Γ2)

Γ1. $\upsilon_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1^{'} = -5 m/s$

Γ2. $\upsilon_2^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2^{'} = 5 m/s$

Γ3. $K_{ολ} = \frac{1}{2} m_1 (\upsilon_1^{'})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\upsilon_2^{'})^2 = 50 j$

Γ4. Θεωρώντας σύμφωνα με την εκφώνηση ως θετική τη φορά προς τα δεξιά έχουμε για το πρώτο σώμα:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_{τελ} - \vec{P}_{αρχ} \Rightarrow \Delta P = -m_1|\upsilon_1{}'| - m_1|\upsilon_1| = -15 \ kgm/s$$

Γ3)

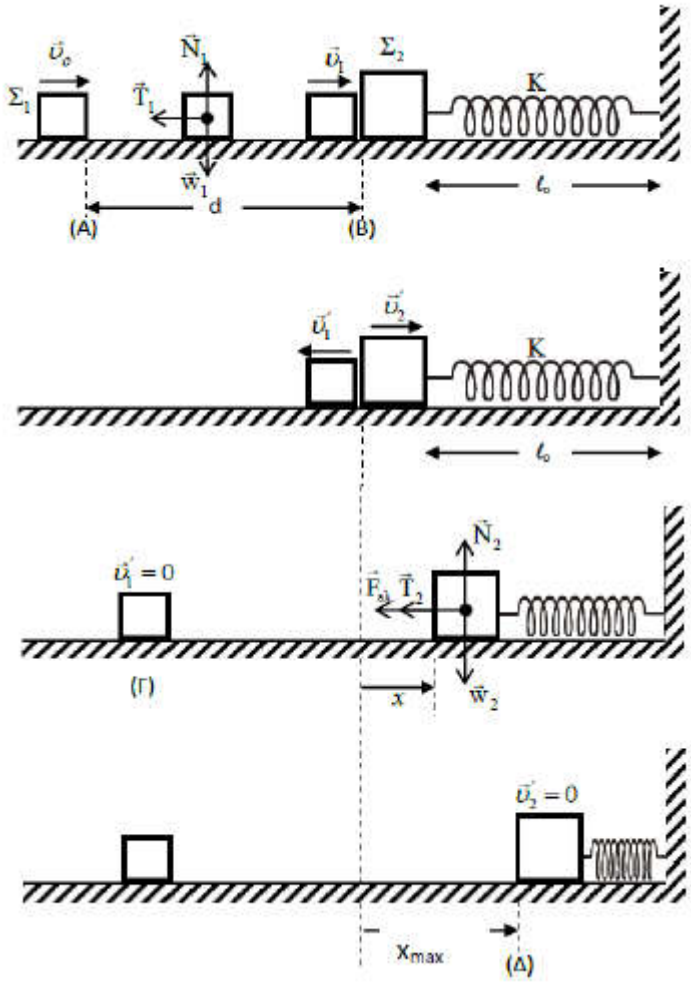
Γ1. Επειδή η μάζα m_2 είναι ακίνητη αρχικά και έχουμε ελαστική μετωπική κρούση, οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την ελαστική κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_1 \overset{m_2 = 2m_1}{\Rightarrow} -\sqrt{10} = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1} \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = +3\sqrt{10}\ m/s$$

Όπου υ_1 η ταχύτητα του Σ_1 αμέσως πριν την κρούση και

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \overset{\substack{\upsilon_1=+3\sqrt{10}\,m/s \\ m_2=2m_1}}{\Rightarrow} \upsilon_2' = +2\sqrt{10}\ m/s$$

Όπου υ_2' η ταχύτητα του Σ_2 αμέσως μετά την κρούση, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η τριβή που ασκείται στο Σ_1 στη διάρκεια της κίνησής του από το Α στο Β και μετά στο Γ, έχει μέτρο:

$T_1 = \mu N_1 \rightarrow \mathbf{T_1 = \mu m_1 g} \rightarrow m_1\alpha = \mu m_1 g \rightarrow \alpha = \mu g \rightarrow$ το μέτρο της $\boldsymbol{\alpha = 5\ m/s^2}$.

Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του Σ_1 στη διαδρομή d από τη θέση (Α) στη θέση (Β), πριν την κρούση θα υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα υ_0 του Σ_1.

$$\Delta K = \sum W_F \Rightarrow K_B - K_A = W_{T_1} + W_{W_1} + W_{N1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -\mu m_1 g d + 0 + 0 \Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_1^2 - m_1\upsilon_0^2 = -2\mu m_1 g d \Rightarrow$$

$$90 - \upsilon_0^2 = -10 \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{100} \Rightarrow \upsilon_0 = 10\,m/s$$

Γ2.

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^{'2}}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}100\% = \frac{2m_1\upsilon_2^{'2}}{m_1\upsilon_1^2}100\% = 2\left(\frac{\upsilon_2^{'}}{\upsilon_1}\right)^2 100\% \Rightarrow$$

$$\pi = 2\left(\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}\right)^2 100\% \Rightarrow \pi = -\frac{800}{9}\%$$

Γ3:

Από το Α μέχρι το Β το Σ_1 κάνει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη κίνηση:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - |\alpha| t_1 \Rightarrow 3\sqrt{10} = 10 - 5t_1 \overset{\sqrt{10}=3,2}{\Rightarrow} 3\cdot 3,2 = 10 - 5t_1 \Rightarrow t_1 = 0,08\,s$$

Απο το Β μέχρι το Γ το Σ_1 κάνει Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνόμενη κίνηση με $\upsilon_{τελ} = 0$, χωρίς να αλλάξει το μέτρο της επιβράδυνσης α : $|\alpha| = 5m/s^2$, αφού πάλι

$$T_1 = \mu m_1 g$$

$$\upsilon = \upsilon_1^{'} - |\alpha| t \underset{t=t_2}{\overset{\upsilon=0}{\Longrightarrow}} t_2 = \frac{\upsilon_1^{'}}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3,2}{5} = \frac{6,4}{10} \Rightarrow t_2 = 0,64s$$

Άρα : $t_{ολ} = t_1 + t_2 = 0,72\,s$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση που έδωσε η επιτροπή: $\sqrt{10} = 3,2$ για την ταχύτητα, δημιουργεί το εξής παράδοξο:
Αν το σώμα εκτελούσε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με $\upsilon_0 = 10$ m/s, τότε θα έφτανε αργότερα στο δεύτερο σώμα Σ_2 από τώρα που εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση.
Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη σχέση: $d = \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2}|a| t_1^2$ (1),να βρουν διαφορετικό αποτέλεσμα για το χρόνο t_1.
Και η λύση αυτή όμως βαθμολογήθηκε ως σωστή.

(Συγκεκριμένα με προσεγγίσεις και ευθύγραμμη ομαλή $t_1 = d/\upsilon_0 = 0,1$s, με προσεγγίσεις και επιβραδυνόμενη κίνηση από τη σχέση $\upsilon_1 = \upsilon_0 - \alpha t_1 \rightarrow t_1 = 0,08$s και από την (1) $t_1 = 0,097$s.)

Γ4. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε (Β) → (Δ) για το Σ_2 μέχρι να σταματήσει:

$$0 - K_2 = W_{Fελατ} + W_{T_2} + W_{N_2} + W_{W_2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^{'2} = 0 - \frac{1}{2}kx_{max}^2 - \mu m_2 g x_{max} + 0 + 0 \Rightarrow$$

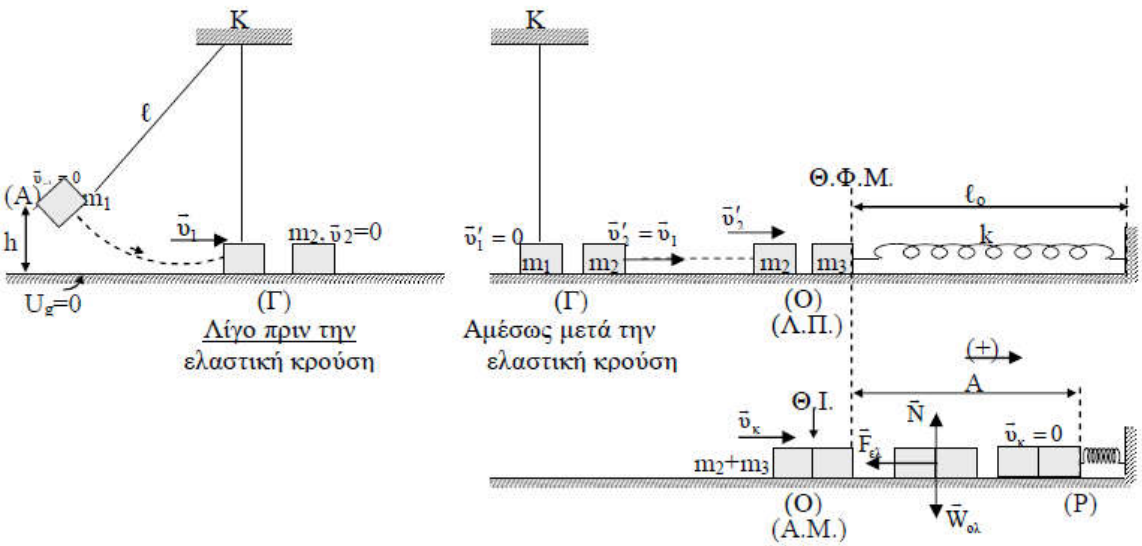
$$kx_{max}^2 + 2\mu m_2 g x_{max} - m_2 \upsilon_2'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$105x_{max}^2 + 10x_{max} - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{max} = \frac{-10 \pm 130}{210} \Rightarrow x_{max} = \frac{4}{7} m \ (\Delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})$$

(Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται)

Δ1)



α. Με εφαρμογή του Θ.Δ.Μ.Ε.(Α→Γ) για το σώμα μάζας m_1 έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \Rightarrow U_{g(A)} + K_{1(A)} = U_{g(\Gamma)} + K_{1(\Gamma)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 gh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 \Rightarrow 2m_1 gh = m_1 \upsilon_1^2 \Rightarrow h = \frac{\upsilon_1^2}{2g} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \underline{\underline{h = 0{,}2m}}.$$

β. Η κρούση του σώματος μάζας m_1 με το σώμα μάζας m_2 είναι μετωπική και ελαστική και, αφού $m_2=m_1$, τα σώματα αμέσως μετά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες. Δηλαδή:

$$\upsilon_1' = 0 \ \text{και} \ \upsilon_2' = \upsilon_1 = 2\frac{m}{s}.$$

Επειδή το οριζόντιο επίπεδο πάνω στο οποίο κινείται το σώμα μάζας m_2 είναι λείο, το σώμα αυτό προσκρούει με την ίδια ταχύτητα που είχε αμέσως μετά την ελαστική του κρούση με το σώμα μάζας m_1.

γ. Με εφαρμογή της Α.Δ.Ο., για τη μετωπική πλαστική κρούση των σωμάτων με μάζες m_2 και m_3, μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέτρο υ_κ της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Δηλαδή:

$$m_2 \vec{\upsilon}_2' + m_3 \cdot 0 = (m_2 + m_3)\vec{\upsilon}_\kappa \Rightarrow m_2 \upsilon_2' = (m_2 + m_3)\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{m_2 \upsilon_2'}{m_2 + m_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{\kappa} = \frac{0{,}1\text{Kg} \cdot 2\frac{\text{m}}{\text{s}}}{(0{,}1+0{,}7)\text{Kg}} \Rightarrow \underline{\underline{\upsilon_{\kappa} = \frac{1}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

Η ταχύτητα που προσδιορίσαμε είναι η ταχύτητα που έχει το συσσωμάτωμα στη θέση ισορροπίας Ο, οπότε αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα ($|\bar{\upsilon}_{\kappa}| = \upsilon_{max}$) της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί αυτό μετά την πλαστική κρούση. Για αυτήν την απλή αρμονική ταλάντωση η σταθερά επαναφοράς είναι ίση με τη σταθερά σκληρότητας του ελατηρίου (D=k), οπότε για την περίοδο και τη γωνιακή συχνότητα αυτής της ταλάντωσης έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2+m_3}{k}} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} T = 0{,}4\pi\,s \text{ και } \omega = \frac{2\pi}{T} = 5r/s$$

Επομένως για το πλάτος Α της Α.Α.Τ. έχουμε:

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{\kappa} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{\kappa}}{\omega} \overset{(S.I.)}{\Rightarrow} \underline{\underline{A = 0{,}05m}}.$$

δ. Για τη στιγμιαία ορμή του συσσωματώματος έχουμε την έκφραση

$$\left.\begin{array}{l} P(t) = (m_2+m_3)\upsilon(t) \\ \upsilon(t) = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) \end{array}\right\} \Rightarrow P(t) = (m_2+m_3)\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_o) \quad (1)$$

Επειδή για t_o=0 θεωρούμε ότι ισχύει x=0, υ=υ_{κ}=+υ_{max}, για την αρχική φάση ισχύει φ_o=0. Οπότε:

$$P(t) = (m_2+m_3)\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t) = 0{,}8\text{Kg}\frac{1}{4}\frac{\text{m}}{\text{s}}\sigma\upsilon\nu\left(5\frac{\pi}{15}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(t) = 0{,}2\text{Kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}2\text{Kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}0{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{P(t) = 0{,}1\text{Kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

Δ2)

α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της ορμής κατά τη κεντρική ανελαστική κρούση.

$$\bar{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \bar{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Leftrightarrow m\upsilon_1 + 0 = m\upsilon_2 + Mv \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\upsilon_1 - m\frac{\upsilon_1}{2} = Mv \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\upsilon_1}{2} = Mv \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{m\upsilon_1}{2M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{2}}{2\cdot 10^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{v = 1\,m/s}.$$

β. Επειδή δεν έχουμε τριβές η μηχανική ενέργεια του συστήματος μάζα Μ – ελατήριο διατηρείται. Έτσι η κινητική ενέργεια το σώματος μάζας Μ αμέσως μετά την κρούση μετατρέπεται σε δυναμική ελατηρίου όταν το σώμα στιγμιαία σταματάει.

$$K_{\Sigma} = U_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}k\Delta l_{max}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}10^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{2}10^{3}\Delta l_{max}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta l_{max} = \sqrt{10^{-4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\Delta l_{max} = 10^{-2}\,m}.$$

	γ. Το σύστημα ελατήριο – μάζα Μ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D = k = 1000 N/m. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-1}}{10^{3}}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{10^{-4}} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{T = 2\pi \cdot 10^{-2}\ s}.$ **δ.** Η μηχανική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι η κινητική του βλήματος. $E_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Leftrightarrow$ $E_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}10^{-3}\cdot\left(2\cdot 10^{2}\right)^2 \Leftrightarrow$ $E_{\pi\rho\iota\nu} = 20\ J.$ Η μηχανική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι η κινητική του βλήματος και η κινητική του βλήματος. $E_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}10^{-3}\cdot 100^2 + \frac{1}{2}10^{-1}\cdot 1^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = 5{,}05\ J.$ Επομένως η ελάττωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι: $\Delta E = E_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - E_{\pi\rho\iota\nu} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Delta E = 5{,}05 - 20 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbf{\Delta E = -14{,}95\ J}.$
Δ3)	α) Από Α.Δ.Ο για την πλαστική κρούση των m και m_1 : $\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)} \Rightarrow m\upsilon_0 = 4m\upsilon_1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 4\ m/s}$ β) Το συσσωμάτωμα και το σώμα Β έχουν ίσες μάζες και συγκρούονται ελαστικά , άρα θα γίνει ανταλλαγή ταχυτήτων $\upsilon'_2 = \upsilon_1 = 4$ m/s γ) Σε μια τυχαία θέση , στο σώμα Β ασκείται κατά την οριζόντια διεύθυνση η δύναμη του ελατηρίου : $\Sigma F_x = F_{ελ} = -kx$ οπότε θα κάνει Α.Α.Τ με D = K και Θ.Ι το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Αρχικά το σώμα Β βρίσκεται στην ακραία θέση . Όταν συγκρούεται με το συσσωμάτωμα , επειδή έχει τη μέγιστη ταχύτητα του για πρώτη φορά , βρίσκεται στη θέση ισορροπίας για πρώτη φορά . Οπότε έχει περάσει χρόνος t = T/4 .

Στον ίδιο χρόνο t , το συσσωμάτωμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση διανύοντας απόσταση ℓ με ταχύτητα $U_1 : U_1 = \frac{\ell}{t} \Rightarrow t = \frac{\ell}{U_1}$ = 0,03925 s

Άρα $t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4t = 0{,}157$ s

δ) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{0{,}157} = 40$ rad /s

$\upsilon'_2 = U_{max} = \omega \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = 0{,}1$ m

Δ4)

Α.α. Το σύστημα ελατήριο – συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k = 1000 = 10^3$ N/m.
Η περίοδος της ταλάντωσης είναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{D}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{9\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-2}}{10^3}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{10\cdot10^{-2}}{10^3}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{10^{-4}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{T = 2\pi\cdot10^{-2}\ s}.$$

β. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{2\pi\cdot10^{-2}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega = 100\ \text{rad/s}.$$

Επειδή το ελατήριο βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η θέση ισορροπίας της Μ, αλλά και της (Μ + m), ταυτίζεται με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η κρούση γίνεται στη θέση αυτή, οπότε η ταχύτητα V_K του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης. Δηλαδή

$$V_K = \upsilon_{max} \Leftrightarrow V_K = \omega A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_K = 100\cdot0{,}1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{V_K = 10\ m/s}.$$

γ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της ορμής κατά τη κεντρική πλαστική κρούση.

$$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετα} \Leftrightarrow m\upsilon + 0 = (M+m)V_K \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1\cdot10^{-2}\cdot\upsilon = (9\cdot10^{-2}+1\cdot10^{-2})\cdot10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{\upsilon = 100\ m/s}.$$

Β. Αν θεωρήσουμε ως θετική φορά του άξονα x΄x την ορά της ΥΚ, τότε η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$y = Aημωt \Leftrightarrow \mathbf{y = 0{,}1 \cdot ημ100t}$ **(S.I.)**

Δ5)

Α. $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma$

$\sum \vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow w_1 - T = m_1\alpha$

Με απόδειξη $\alpha = \alpha_\gamma R$, οπότε

$w_1 - \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma = m_1\alpha \Rightarrow w_1 - \frac{1}{2}M\alpha = m_1\alpha \Rightarrow$

$m_1g - \frac{1}{2}M\alpha = m_1\alpha \Rightarrow \alpha = 4\frac{m}{s^2}$

Β. $\omega = \alpha_\gamma t \Rightarrow \omega = \frac{\alpha}{R}t \Rightarrow \omega = 20\ rad/sec$

$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 \Rightarrow K = 12J$

Γ. Α.Δ.Ο

$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά} \Rightarrow m_1u_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1u_1}{(m_1 + m_2)}$ $\Rightarrow V = 1m/s$

$u_1 = \alpha t \Rightarrow u_1 = 4m/s$

Π.Θ.Ι: $\sum F = 0 \Rightarrow k\Delta l_1 = m_2g \Rightarrow \Delta l_1 = 0{,}15m$

Ν.Θ.Ι: $\sum F = 0 \Rightarrow k\Delta l_2 = m_1g + m_2g \Rightarrow \Delta l_2 = 0{,}2m$

Α.Δ.Ε.Τ

$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_2 - \Delta l_1)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0{,}15m$

Δ. $\left|\frac{\Delta P}{\Delta t}\right| = \left|\sum F_{\xi\xi}\right| = \left|(m_1 + m_2)\alpha\right| = (m_1 + m_2)\omega^2 x = kx \Rightarrow$

$\left|\frac{\Delta P}{\Delta t}\right| = 20N$

Δ6)

Α1.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{m_2}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m_2}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{4\pi^2 \cdot 2}{\pi^2/25} \Rightarrow \boxed{k = 200\,N/m}$$

Α2.

$$u_{max} = \omega A \Rightarrow u_{max} = \frac{2\pi}{T}A \Rightarrow u_{max} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}0{,}1 \Rightarrow \boxed{u_{max} = 1\frac{m}{s}}$$

Β1.

Α.Δ.Μ.Ε(για την κίνηση του Σ_1):

$$K + U = K' + U' \Rightarrow m_1 gH = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 \Rightarrow u_1^2 = 2gH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1^2 = 2 \cdot 10 \cdot 1{,}8 = 36 \Rightarrow u_1 = 6\frac{m}{s}$$

Τύποι Ελαστικής Κρούσης: $\left(u_2 = -u_{max} = -1\frac{m}{s}\right)$

$$u'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2 \Rightarrow u'_2 = \frac{2 \cdot 2}{2+2}6 + \frac{2-2}{2+2}(-1)$$

$$\Rightarrow u'_2 = 6\frac{m}{s}$$

Α.Δ.Μ.Ε. (για την κίνηση του Σ_2):

$$K + U = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}m_2 u'^2_2 = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'^2 = \frac{m_2 u'^2_2}{k} = \frac{2 \cdot 6^2}{200_{100}} \Rightarrow A' = \frac{6}{10} \Rightarrow \boxed{A' = 0{,}6m}$$

Β2.

Τύποι Ελαστικής Κρούσης:

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 \Rightarrow u'_1 = 1\frac{m}{s}$$

Υπολογίζουμε τους χρόνους κίνησης των δύο σωμάτων για τη διαδρομή από το σημείο κρούσης (Θ.Ι.) έως τη (Θ.Μ.Α.).

Για το m_1 που κάνει Ε.Ο.Κ. έχουμε:

$$u'_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x}{u'_1} = \frac{A'}{u'_1} = \frac{0{,}6}{1} \Rightarrow \boxed{\Delta t_1 = 0{,}6\,sec}$$

Για το m_2 που κάνει Α.Α.Τ. έχουμε:

$$\Delta t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{4} = \frac{9,4}{20} \Rightarrow \boxed{\Delta t_2 = 0,47\,sec}$$

Αφού $\Delta t_2 < \Delta t_1$ θα έχουμε ότι το Σ_2 θα προλάβει το Σ_1.

Δ7)

Για το πλήρες σφήνωμα του βλήματος απαιτούνται 100 J. Αυτή η ποσότητα ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα. Δηλαδή η ελάχιστη ποσότητα παραγόμενης θερμικής ενέργειας για το πλήρες σφήνωμα του βλήματος είναι.

$Q_{min} = 100\,J.$

Θα υπολογίσουμε την απώλεια ενέργειας (παραγωγή θερμότητας) κατά την πλαστική κρούση. Έστω υ η ταχύτητα του κωνικού βλήματος πριν την κρούση και V η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση. Από την διατήρηση της ορμής του συστήματος κατά την πλαστική κρούση έχουμε:

$$\vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετα} \Leftrightarrow mυ + 0 = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{m}{m+M}υ \quad (1)$$

$$Q = \left|K_{πριν} - K_{μετα}\right| \Leftrightarrow Q_{min} = \frac{1}{2}mυ^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} Q = \frac{1}{2}mυ^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{(M+m)^2}υ^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}mυ^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = K_{πριν}\frac{M}{M+m} \quad (2) \qquad (K_{πριν} = \frac{1}{2}mυ^2)$$

α. Αν $K_{πριν} = 100\,J$ η σχέση (2) δίνει:

$$Q = 100\frac{1}{1+0,2} \Rightarrow Q = 83,33\,J.$$

Αφού είναι $Q < Q_{min}$ το βλήμα δεν σφηνώνεται ολόκληρο στο σώμα.

β. Για να σφηνωθεί το βλήμα ολόκληρο στο σώμα θα πρέπει

$$Q \geq Q_{min} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} K_{πριν}\frac{1}{1+1,2} \geq 100 \Leftrightarrow K_{πριν} \geq 120\,J.$$

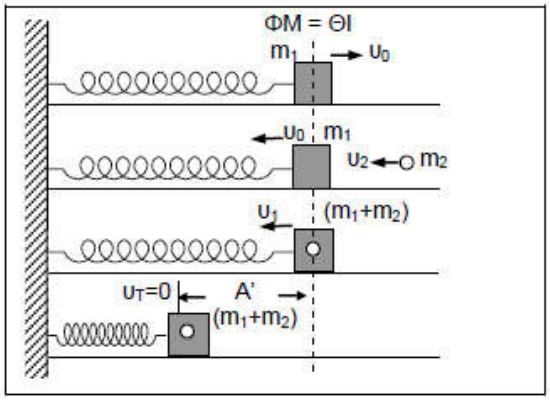
Άρα $K_{πριν_{(min)}} = 100\,J.$

γ. Αφού θέλουμε το βλήμα με $K_{πριν} = 100$ J να σφηνωθεί πλήρως στο σώμα θα είναι Q = 100 J και η σχέση (2) τότε δίνει:

$$100 = 100\frac{M}{M+m} \Rightarrow \frac{M}{M+m} = 1 \Rightarrow \frac{M+m}{M} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{m}{M} = 1 \Rightarrow \frac{m}{M} = 0$$

(Ποιο σωστά $\lim\left(\frac{m}{M}\right) \to 0$)

Δ8)



Από την εξίσωση της απομάκρυνσης:
x = 0,1ημ10t (SI), έχουμε:
A = 0,1 m
ω = 10 rad/s και T = 2π/ω = π/5 s
$\varphi_0 = 0$

α) $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{A^2} = 1200\frac{N}{m}$ και

$$m_1\omega^2 = k \Rightarrow m_1 = \sqrt{\frac{k}{\omega}} = 12kg$$

β)

$$E' = \frac{1}{2}kA'^2 = 36J,$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{k}{m_1+\frac{m_1}{2}}} = \sqrt{\frac{200}{3}}\frac{rad}{s}$$

γ) Επειδή ο δεδομένος χρόνος είναι $t = \frac{\pi}{10}s \xrightarrow{T=\frac{\pi}{5}s} t = \frac{T}{2}$, το σώμα m_1 κατά τη στιγμή της κρούσης θα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του (x=0) κινούμενο προς τα αριστερά. Έτσι:

ΑΔΟ: $m_1\upsilon_0 + \frac{m_1}{2}\upsilon_2 = \frac{3m_1}{2}V$ (1), όμως:

$\upsilon_0 = \omega A = 1$ m/s και $V = \omega' A' = 2$ m/s, άρα από την (1): $\upsilon_2 = 4$ m/s.

Δ9)

α. Θέτουμε $\frac{m_1}{m_2} = x \Rightarrow m_1 = xm_2$ (1)

Για την ταχύτητα υ_1' της m_1 μετά την ελαστική κεντρική κρούση της με την ακίνητη m_2 ισχύει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} -9 = \frac{xm_2 - m_2}{xm_2 + m_2}\cdot 15 \Rightarrow -9 = \frac{m_2(x-1)}{m_2(x+1)}\cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9(x+1) = 15(x-1) \Rightarrow x = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

β. Για την ταχύτητα υ_2' της m_2 μετά την ελαστική κεντρική κρούση της με την m_1 ισχύει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_2' = \frac{2xm_2}{xm_2+m_2}\cdot 15 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2xm_2}{m_2(x+1)}\cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}\cdot 15 \Rightarrow \upsilon_2' = 6 \ \text{m/s}.$$

γ. Η αρχική κινητική ενέργεια της m_1 είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}m_1 15^2 \Rightarrow K_1 = \frac{225}{2}m_1$$

Αφού η m_2 ήταν ακίνητη πριν την κρούση, η κινητική ενέργεια που αποκτά μετά από αυτή, είναι αυτή που της μεταβίβασε η m_1.

$$K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \Rightarrow K_2' = \frac{1}{2}m_2 6^2 \Rightarrow K_2' = 18m_2$$

Έτσι το ποσοστό επί τοις εκατό της κινητικής ενέργειας που μεταβίβασε η m_1 στην m_2 είναι:

$$P\% = \frac{K_2'}{K_2}100\% \Rightarrow P\% = \frac{18m_2}{\frac{225}{2}m_1}100\% \Rightarrow P\% = \frac{36}{225}\frac{m_2}{m_1}100\% \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} P\% = \frac{36}{225}\cdot 4\cdot 100\% \Rightarrow P\% = \frac{36}{225}\cdot 4\cdot 100\% \Rightarrow P\% = 64\%$$

δ. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση της m_1 μετά την κρούση.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{T_1} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = -T_1\cdot x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 = \mu m_1 g x_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}9^2 = 0{,}1\cdot 10\cdot x_1 \Rightarrow x_1 = 40{,}5 \ \text{m}$$

Ομοίως και για την κίνηση της m_2.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{T_2} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -T_2\cdot x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \mu m_2 g x_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}6^2 = 0{,}1\cdot 10\cdot x_2 \Rightarrow x_2 = 18 \ \text{m}$$

Έτσι η απόσταση d των δύο σωμάτων είναι:

$$d = x_1 + x_2 \Rightarrow d = 40{,}5 + 18 \Rightarrow d = 58{,}5 \ \text{m}.$$

Δ10)

Α. Για την κίνηση του σώματος στο λείο τεταρτοκύκλιο, εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$K_{(A)} + U_{(A)} = K_{(B)} + U_{(B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + m_1 gR = \frac{1}{2} m_1 \upsilon^2 + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{2gR} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\upsilon = 6\ m/s}.$$

Β. Από το θεώρημα διατήρησης της ορμής του συστήματος κατά την κεντρική πλαστική κρούση υπολογίζουμε την ταχύτητα V_K του συσσωματώματος.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$m_1 \upsilon + 0 = (m_1 + m_2) V_K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot 6 = (1+2) V_K \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{V_K = 2\ m/s}.$$

Γ. Αμέσως μετά την κρούση το σύστημα ελατήριο – συσσωμάτωμα έχει μόνο κινητική ενέργεια λόγω της V_K. Όταν το συσσωμάτωμα σταματάει στιγμιαία για πρώτη φορά το ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά x και όλη η κινητική ενέργεια έχει μετατραπεί σε ελαστική δυναμική ενέργεια ελατηρίου. Δηλαδή ισχύει:

$$K_{\sigma\upsilon\sigma\sigma\omega\mu.} = U_{\epsilon\lambda\alpha\tau.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_K^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = V_K \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{\frac{1+2}{300}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{\frac{3}{300}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{\frac{1}{100}} \Leftrightarrow$$

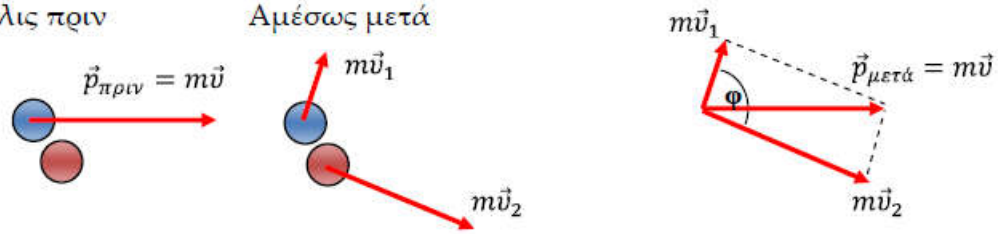
$$\Leftrightarrow x = 2\frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 0{,}2\ m}.$$

Δ. $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}\,sec$ και $t = \dfrac{3T}{4} = \dfrac{3\pi}{20}\,sec$

Δ11) Δ1.

Μόλις πριν Αμέσως μετά



Αφού $\Sigma\vec{F}_{εξ} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{πριν} = \vec{p}_{μετά} \Rightarrow m\vec{υ} = m\vec{υ}_1 + m\vec{υ}_2$ ή με το παραλληλόγραμμο

$$p^2_{μετά} = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2συνφ \Rightarrow m^2υ^2 = m^2υ_1^2 + m^2υ_2^2 + 2mυ_1mυ_2συνφ$$

$$\Rightarrow υ^2 = υ_1^2 + υ_2^2 + 2υ_1υ_2συνφ \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει :

$$K_{πριν} = K_1 + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}mυ_1^2 + \frac{1}{2}mυ_2^2 \Rightarrow υ^2 = υ_1^2 + υ_2^2 \xrightarrow{(1)} \underbrace{2υ_1υ_2}_{\neq 0}συνφ = 0$$

$\Rightarrow συνφ = 0 \Rightarrow φ = \frac{π}{2}$. Επομένως μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινηθούν **κάθετα μεταξύ τους.**

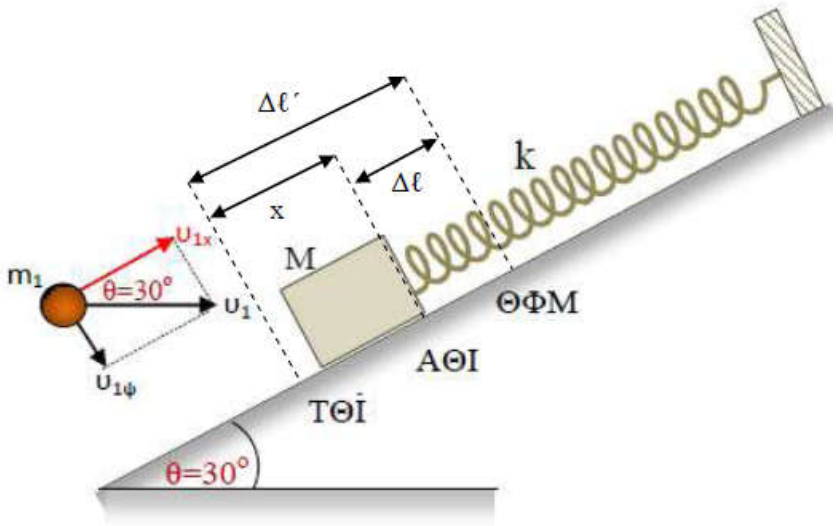
Δ2. Αφού $υ^2 = υ_1^2 + υ_2^2$ αντικαθιστώντας $υ = \frac{4}{3}$ και $υ_2 = \frac{υ_1}{\sqrt{3}}$ βρίσκουμε:

$$\frac{16}{9} = υ_1^2 + \frac{υ_1^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{4}{3}υ_1^2 \Rightarrow \boxed{υ_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}}\ \text{m/s} \text{ και } \boxed{υ_2 = \frac{2}{3}}\ \text{m/s}.$$

Δ3.

Αναλύουμε την ταχύτητα υ1 της σφαίρας σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη (x'x) και μια κάθετη (ψ'ψ) στο πλάγιο επίπεδο.

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x'x μόλις πριν και



μόλις μετά την πλαστική κρούση των σωμάτων έχουμε:

$$m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta = (M+m_1)\upsilon_\kappa \Rightarrow m\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta = 4m\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \upsilon_\kappa = 0{,}25\frac{m}{s}.$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των M, m1 κατά την κρούση είναι:

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda_{\sigma\upsilon\sigma}} - K_{\alpha\rho\chi_{\sigma\upsilon\sigma}} = \frac{1}{2}4m\upsilon_\kappa^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \left(2\cdot\frac{1}{16} - \frac{2}{3}\right)J \Rightarrow \boxed{\Delta K = -\frac{13}{24}J}$$

Δ4.

Στην αρχική θέση ισορροπίας (ΑΘΙ) του M ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow k\cdot\Delta\ell = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \Delta\ell = \frac{3mg\eta\mu\theta}{k} \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}15m.$$

Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος (ΤΘΙ) ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow k\Delta\ell' = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow k\Delta\ell' = (M+m_1)g\eta\mu\varphi \Rightarrow \Delta\ell = \frac{4mg\eta\mu\theta}{k} \Rightarrow$$

$$\Delta\ell' = 0{,}2\,m.$$

Το συσσωμάτωμα ξεκινά να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, έχοντας αρχική απομάκρυνση από την ΤΘΙ: $x = \Delta\ell' - \Delta\ell = 0{,}05\,m$ και ταχύτητα $\upsilon_\kappa = 0{,}25\frac{m}{s}$. Η θέση αυτή (ΑΘΙ) αποτελεί πλέον μια τυχαία θέση της ταλάντωσης που ξεκινά. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και τη θέση πλάτους (ακραία θέση) προκύπτει:

$$K + U = U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}4m\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \frac{4m\upsilon_\kappa^2}{k} + x^2 = A^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{4m\upsilon_\kappa^2}{k} + x^2}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{20} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}05\sqrt{2}\,m}$$

Δ12)

Δ1. Πριν : $P_{πριν} = m \cdot u$ (1)

Μετά : $P_{μετά} = \sqrt{P'^2_1 + P'^2_2 + 2P'_1P'_2συνφ}$

$= \sqrt{m^2u_1^2 + m^2u_2^2 + 2m^2u_1u_2συνφ}$ (2)

Από Α.Δ.Ο. και τις (1), (2) $\Rightarrow$

$m \cdot u = \sqrt{m^2u_1^2 + m^2u_2^2 + 2m^2u_1u_2συνφ} \Rightarrow$

$m^2u^2 = m^2u_1^2 + m^2u_2^2 + 2m^2u_1u_2συνφ \Rightarrow$

$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2συνφ$ (3)

Από Α.Δ.Κ.Ε. $mu^2 = mu_1^2 + mu_2^2 \Rightarrow u^2 = u_1^2 + u_2^2$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε $2u_1u_2συνφ = 0 \Rightarrow$

$συνφ = 0 \Rightarrow \boldsymbol{φ = \frac{π}{2} rad}$

Δ2. $u^2 = u_1^2 + u_2^2 \overset{u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{3}}}{\Rightarrow} \frac{16}{9} = u_1^2 + \frac{u_1^2}{3} \Rightarrow \frac{16}{9} = \frac{4u_1^2}{3} \Rightarrow$

$u_1^2 = \frac{12}{9} \Rightarrow \boldsymbol{u_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} m/s}$

$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow u_2 = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boldsymbol{u_2 = \frac{2}{3} m/s}$

Δ3. Από Α.Δ.Ο. $\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \Rightarrow m_1 \cdot u_1 = (M + m_1) \cdot u_Σ \Rightarrow$

$u_Σ = \frac{m_1 \cdot u_1}{M + m_1} \Rightarrow u_Σ = \frac{1 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{6} m/s$

$ΔK = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}(M + m_1)u_Σ^2 - \frac{1}{2}m_1u_1^2$

$= \frac{1}{2}(3 + 1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \frac{1}{2}1 \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{-\frac{1}{2} Joule}$

Δ4. Θ.Μ.Κ.Ε. $K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{τρ} + W_{Fελ} \Rightarrow$

$-\frac{1}{2}(M + m_1)u_Σ^2 = -μ \cdot N \cdot x_{max} - \frac{1}{2}kx_{max}^2 \overset{N=(M+m_1)g}{\Rightarrow}$

$-\frac{1}{2}(M + m_1)u_Σ^2 = -μ \cdot (M + m_1)g \cdot x_{max} - \frac{1}{2}kx_{max}^2 \Rightarrow$

$-\frac{1}{2}4\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = -\frac{1}{12} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{2}k \cdot 4 \cdot 10^{-4} \Rightarrow$

$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{15} - \frac{k}{5000} \Rightarrow \frac{k}{5000} = \frac{1}{10} \Rightarrow \boldsymbol{k = 500 N/m}$