ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

Α1 - β

Α2 - α

Α3 - β

Α4 - β

Α5 - α

Α6 - γ

Α7 - δ

Α8 - β

Α9 - β

Α10- Διαν-N m, Διαν - Kg m^2/s, Διαν - rad/s, Μον - Kg ·m^2

Α11 α -Λ, β -Λ, γ -Σ, δ - Σ, ε -Λ , στ -Σ, ζ -Λ, η - Σ, θ -Σ

Α12 - Ι - kg m^2 , L - kg m^2/s , ω - rad /s , τ - N · m , f - Hz

Α13 α -μηδέν , β - ροπών , γ - σύνθετη

Α14 - β

Α15 - δ

Α16 - δ

Α17 α - Λ , β -Λ , γ - Λ , δ- Σ , ε - Λ, στ - Σ , ζ - Σ , η - Λ

Α18 – α

Α19 – γ

Α20 α - Λ, β - Λ , γ - Λ , δ - Σ , ε - Λ , στ - Σ , ζ - Σ , η - Σ

Α21 - β

Α22 - δ

Α23 - β

Α24 - β

Α25 - γ

Α26 α - Σ , β - Λ , γ - Σ , δ - Σ, ε - Λ, στ - Λ, ζ- Σ , η - Σ

Α27- β

Α28 - γ ή β (οδηγία ΚΕΕ)

Α29 – α – Σ, β – Σ, γ – Σ, δ - Λ

Α30 - δ

Α31 - δ

B1)

Σωστό το β.

Η δύναμη F στον δίσκο (α) δεν έχει ροπή οπότε ο δίσκος αυτός εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, για την οποία ο θεμελιώδης νόμος δίνει:

$$F = m_{(\alpha)} \cdot \alpha_{cm_{(\alpha)}} \Leftrightarrow \alpha_{cm_{(\alpha)}} = \frac{F}{m_{(\alpha)}} \quad (1)$$

Η δύναμη F στον δίσκο (β) έχει ροπή οπότε ο δίσκος αυτός εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση, οι οποίες όμως είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για την μεταφορική κίνηση του δίσκου αυτού ο θεμελιώδης νόμος δίνει:

$$F = m_{(\beta)} \cdot \alpha_{cm_{(\beta)}} \Leftrightarrow \alpha_{cm_{(\beta)}} = \frac{F}{m_{(\beta)}} \quad (2)$$

Αλλά $m_{(\alpha)} = m_{(\beta)}$, οπότε από τις (1) και (2) έχουμε ότι

$$\alpha_{cm_{(\alpha)}} = \alpha_{cm_{(\beta)}} \quad (3)$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα οι δύο δίσκοι έχουν να διανύσουν την ίδια απόσταση. Έτσι έχουμε

$$x_{(\alpha)} = x_{(\beta)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha_{cm_{(\alpha)}} t_{\alpha}^2 = \frac{1}{2}\alpha_{cm_{(\beta)}} t_{\beta}^2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} t_{\alpha} = t_{\beta}.$$

B2)

Σωστό το β.

Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot R \quad (1)$$

Η ολική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{5}m\upsilon_{cm}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{K = \frac{7}{10}m\upsilon_{cm}^2}.$$

B3)

Σωστή είναι η πρόταση α.

Αρχικά ο αστέρας στρέφεται με συχνότητα f_0, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I_0 και η γωνιακή του ταχύτητα ω_0. Σε κάποιο στάδιο της συρρίκνωσής του η συχνότητά του είναι f, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I και η γωνιακή του ταχύτητα ω.

Επειδή η συρρίκνωση οφείλεται σε εσωτερικές δυνάμεις, η στροφορμή διατηρείται σταθερή.

Η ελάττωση της ακτίνας του αστέρα έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της ροπής αδράνειας, δηλαδή

$$I \prec I_0 \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} \prec 1$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής

$$L_{\alpha\rho\chi.} = L_{\tau\varepsilon\lambda.} \Leftrightarrow I_0 \cdot \omega_0 = I \cdot \omega \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\omega} \prec 1 \Leftrightarrow$$

$$\omega_0 \prec \omega \Leftrightarrow 2\pi f_0 \prec 2\pi f \Leftrightarrow f_0 \prec f$$

B4)

Το γ, γιατί:

$$\left.\begin{array}{l} K = \dfrac{1}{2} I\omega^2 \\ L = I\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{L}{I} \end{array}\right] \Rightarrow K = \frac{L^2}{2I} \xrightarrow[I\downarrow]{L = ct} K \uparrow$$

B5)

N=20

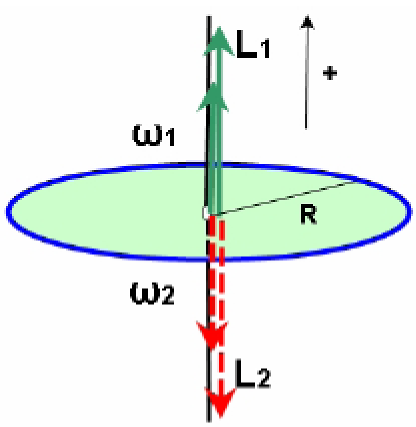
T=1 min=60 s

$$f = \frac{N}{t} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

T=3 s , $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{3} = 2\pi/3\, rad/s$

$L_1 = I\omega_1$ $\quad$ $L_2 = I\omega_2$

Η ροπή αγράνειας δεν αλλάζει εφ΄όσον δεν αλλάζει η μάζα,ο άξονας περιστροφής ή η κατανομή της μάζας $L_1 = I\omega_1$



Η στροφορμή του τροχού αλλάζει γιατί είναι διανυσματικό μέγεθος και επομένως αλλάζει η κατεύθυνση άρα και το μέγεθος της στροφορμής.

Β6)

Σωστό το β.
Σχολικό βιβλίο σελίδα 125

Β7)

Για $\Delta_1 : u_{cm}^{(1)} = (3\omega)\cdot R$

Για $\Delta_2 : u_{cm}^{(2)} = \omega\cdot(2R)$

Διαιρούμε κατά μέλη: $\dfrac{u_{cm}^{(1)}}{u_{cm}^{(2)}} = \dfrac{3}{2}$

Β8)

Απάντηση: Σωστή η (β)

Δικαιολογία: Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω μεταφοράς και περιστροφής είναι αντίστοιχα.

$K_\mu = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2$ και $K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} I\omega^2$

Αλλά $K_\mu = K_{\pi\varepsilon\rho}$ οπότε $m\upsilon_{cm}^2 = I\omega^2$ (1)

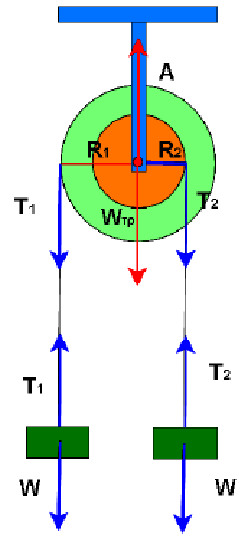
Αλλά $\upsilon_{cm} = \omega R$ όπου R η ακτίνα του σώματος οπότε η (1) δίνει:
$m\omega^2 R^2 = I\omega^2$ άρα: $\boxed{I = mR^2}$ (2)
Αλλά η σχέση (2) εκφράζει τη ροπή αδράνειας λεπτού δακτυλίου μάζας m και ακτίνας R. **Άρα το σώμα είναι λεπτός δακτύλιος**

Β9)

Σωστή απάντηση είναι η (β)

Η τροχαλία θα περιστραφεί με την επίδραση των ροπών των δυνάμεων Α, $W_{\tau\rho}$, T_1 και T_2
Οι ροπές των δυνάμεων Α και Wτρ είναι μηδέν άρα η τροχαλία θα κινηθεί με την επίδραση των ροπών των δυο τάσεων των νημάτων T_1 και T_2
Αρχικά όταν η τροχαλία κρατείται ακίνητη για τα δύο σώματα που κρέμονται ισχύουν οι σχέσεις: $W-T_1=0$ και $W-T_2=0$
Από τις οποίες προκύπτει $T_1 = T_2$ άρα για τις ροπές αυτών έχουμε: $\dfrac{T_{T_1}}{T_{T_2}} = \dfrac{T_1\cdot R_1}{T_2\cdot R_2} = \dfrac{R_1}{R_2} > 1$ άρα και $T_{T_1} > T_{T_2}$

επομένως η τροχαλία θα αρχίσει να περιστρέφεται με φορά Αντίθετα των δεικτών του ρολογιού.



Πρέπει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης η σχέση $T_1=T_2$ δεν ισχύει

B10)

Σωστό το β.

Επειδή η στροφορμή του συστήματος διατηρείται, έχουμε:

$L_{αρχ} = L_{τελ} \Leftrightarrow I_{αρχ}\omega_{αρχ} = I_{τελ}\omega_{τελ} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_{αρχ}}{\omega_{τελ}} = \frac{I_{τελ}}{I_{αρχ}} \quad (1)$$

Όταν το παιδί μετακινείται από το σημείο Α της περιφέρειας στο σημείο Β πλησιέστερα προς το κέντρο, μειώνεται η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος – παιδί. Δηλαδή είναι $I_{αρχ} > I_{τελ}$ (2).

Έτσι η σχέση (1) λόγω της (2) δίνει:

$\boldsymbol{\omega_{τελ} > \omega_{αρχ}}$ δηλαδή το σύστημα στρέφεται γρηγορότερα.

B11)

Σωστό το β.

Σύμφωνα με την θεωρία ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας στερεού γίνεται με άθροιση των στοιχειωδών ροπών αδράνειας όλων των στοιχειωδών μαζών στις οποίες έχουμε χωρίσει το στερεό. Δηλαδή είναι $I = \sum \Delta m \cdot r^2$, όπου r η απόσταση της κάθε μίας στοιχειώδους μάζας από τον άξονα περιστροφής.

Ο δίσκος και ο δακτύλιος έχουν την ίδια μάζα. Έτσι αν χωρίσουμε και τα δύο σώματα στον ίδιο αριθμό στοιχειωδών μαζών (π.χ. 100 στοιχειώδεις μάζες Δm), τότε:

Στον δακτύλιο και οι 100 στοιχειώδεις μάζες έχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα. Αντίθετα στο δίσκο κάποιες από τις 100 στοιχειώδεις μάζες απέχουν από τον άξονα περιστροφής μικρότερες αποστάσεις από R. Άρα είναι $I_{ΔΣ} < I_{ΔΚ}$.

B12)

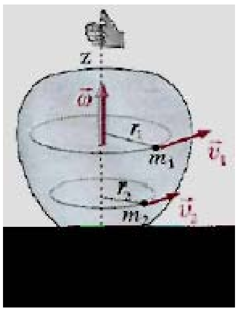
Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη γη από τα άλλα ουράνια σώματα είναι κεντρικές(από όπου περνάει και ο άξονας περιστροφής) άρα και η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν έχουμε λοιπόν διατήρηση της στροφορμής και εφ΄όσον η ροπή αδράνειας είναι σταθερή σταθερή παραμένει η στροφορμή άρα και η γωνιακή ταχύτητα ω επομένως και η περίοδος περιστροφής ω=2π/T

B13)

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα ζ'ζ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Χωρίζουμε το σώμα σε στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, ⋯, m_n, οι οποίες απέχουν από τον άξονα περιστροφής αποστάσεις r_1,r_2,..., r_n αντίστοιχα. Τα μέτρα των γραμμικών τους ταχυτήτων δίνονται από τις σχέσεις:

$\upsilon_1=\omega r_1$, $\upsilon_2=\omega r_2$, ..., $\upsilon_n=\omega r_n$

κινητική ενέργεια του σώματος είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των μαζών από τις οποίες αποτελείται:



$$K=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2+\ldots+\frac{1}{2}m_n\upsilon_n^2$$ ή

$$K=\frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2+\frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2+\ldots+\frac{1}{2}m_n\omega^2r_n^2$$ ή

$$K=\frac{1}{2}(m_1r_1^2+m_2r_2^2+\ldots+m_nr_n^2)\omega^2$$

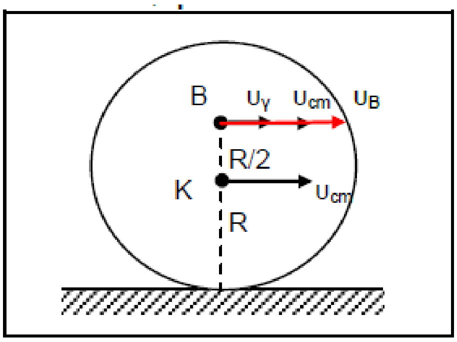
Όμως $m_1r_1^2+m_2r_2^2+\ldots+m_nr_n^2=I$, όπου I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής z΄z. Επομένως:

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της κινητικής ενέργειας ενός σώματος που στρέφεται.

Β14)

Το α, γιατί:



Ισχύει: $\vec{\upsilon}_B=\vec{\upsilon}_{cm}+\vec{\upsilon}_\gamma \Rightarrow \upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_\gamma$

Όμως: $\upsilon_\gamma=\omega\cdot\frac{R}{2}=\frac{\upsilon_{cm}}{2}$

Άρα: $\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\frac{\upsilon_{cm}}{2}=\frac{3}{2}\upsilon_{cm}$

Β15)

Το γ, γιατί:

Η ροπή αδράνειας είναι $I=\Sigma m_ir_i^2$ και επειδή για τις ακτίνες του δίσκου ισχύει: $r_i\leq R$ συμπεραίνουμε ότι $I_{II}>I_I$. Έτσι έχουμε:

Από 2ο Ν.Ν. (ΣΤΡ): $\alpha=\frac{\Sigma\tau}{I}\xrightarrow{I_{II}>I_I}\alpha_{II}<\alpha_I$

Β16)

Σωστό το α.

Επειδή η ροπή είναι σταθερή η κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική. Η γωνιακή του ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο υπολογίζεται από την σχέση:

$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ (1)

Έτσι η στροφορμή του κυλίνδρου είναι:

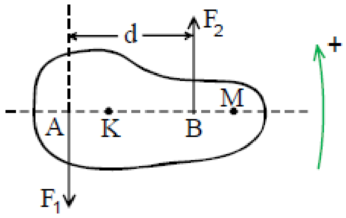
$L=I\omega\overset{(1)}{\Leftrightarrow}L=I\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ (2)

Η σχέση (2) είναι συνάρτηση 1ου βαθμού ως προς t (της μορφής $y=\alpha x$, $\alpha>0$). Επομένως η γραφική της παράσταση είναι ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

B17)

Σωστό το γ.

Η συνολική ροπή ως προς το σημείο Κ είναι:



$$\Sigma\tau_{(K)} = F_1(AK) + F_2(BK) \overset{F_1=F_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{F_1=F_2}{\Leftrightarrow} \Sigma\tau_{(K)} = F_1(AK) + F_1(BK) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\tau_{(K)} = F_1[(AK) + (BK)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\tau_{(K)} = F_1 \cdot d.$$

Η συνολική ροπή ως προς το σημείο Μ είναι:

$$\Sigma\tau_{(M)} = F_1(AM) - F_2(BM) \overset{F_1=F_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{F_1=F_2}{\Leftrightarrow} \Sigma\tau_{(M)} = F_1(AM) - F_1(BM) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\tau_{(K)} = F_1[(AM) - (BM)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Sigma\tau_{(K)} = F_1 \cdot d.$$

Έτσι η συνολική ροπή του ζεύγους δυνάμεων είναι πάντα ίδια, ανεξάρτητη από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται.

B18)

Σωστό το α.

Ο κύβος εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση χωρίς τριβές. Εφαρμόζουμε θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{κυβ}^2 + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\upsilon_{κυβ}^2 = 2mgh \quad (1)$$

Η σφαίρα εκτελεί στροφική και μεταφορική κίνηση. Η τριβή κύλισης που εξασφαλίζει την μη ολίσθηση της σφαίρας έχει έργο μηδενικό. Έτσι και για την κίνηση αυτή εφαρμόζουμε θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{σφ}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{σφ}^2 + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\upsilon_{σφ}^2 = 2mgh - I\omega_{σφ}^2 \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη τω (1) και (2) έχουμε:

$$\Leftrightarrow m\upsilon_{κυβ}^2 - m\upsilon_{σφ}^2 = I\omega_{σφ}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(\upsilon_{κυβ}^2 - \upsilon_{σφ}^2) = I\omega_{σφ}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_{κυβ}^2 - \upsilon_{σφ}^2 = \frac{I\omega_{σφ}^2}{m} \Leftrightarrow$$

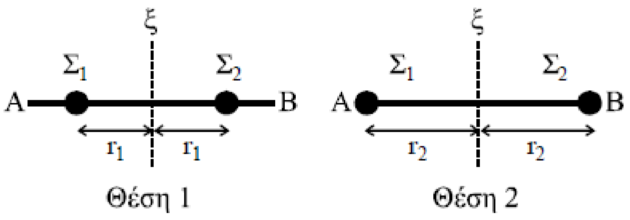
$$\Leftrightarrow \upsilon_{κυβ}^2 - \upsilon_{σφ}^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \upsilon_{κυβ} > \upsilon_{σφ}.$$

B19)

Σωστό το α.

Η ροπή αδράνειας εκφράζει την αδράνεια στη στροφική κίνηση. Όσο μικρότερη είναι η ροπή αδράνειας τόσο μικρότερη η αδράνεια του συστήματος και επομένως τόσο ευκολότερα ξεκινάει από την ηρεμία η στροφική κίνηση. Η ροπή αδράνειας είναι:



Στη θέση 1: $I_1 = I_{ραβδου} + 2mr_1^2$ (1)

Στη θέση 2: $I_2 = I_{ραβδου} + 2mr_2^2$ (2)

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε:

$I_1 - I_2 = 2m(r_1^2 - r_2^2)$ (3)

Επειδή όμως είναι $r_1 < r_2$ από την (3) έχουμε $\mathbf{I_1 < I_2}$.

B20)

β

Αιτιολόγηση :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot I_1 \cdot \omega_1^2}{\frac{1}{2}\cdot I_2 \cdot \omega_2^2} = \frac{L_1 \cdot \omega_1}{L_2 \cdot \omega_2} = \frac{L_1 \cdot \frac{2\pi}{T_1}}{L_2 \cdot \frac{2\pi}{T_2}} = \frac{L_1 \cdot T_1}{L_2 \cdot T_2} = 12\lambda$$

B21)

Σωστό το γ.

Οι δυνάμεις των βαρών w_1 του δίσκου και w_2 του παιδιού είναι παράλληλες προς τον άξονα περιστροφής. Η δύναμη στήριξης N του άξονα περιστροφής είναι επί του άξονα. Επομένως

$$\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_{πριν} = \vec{L}_{μετά} \Leftrightarrow (I_{δίσκου} + I_{παιδιού})\omega_{πριν} = (I_{δίσκου} + I'_{παιδιού})\omega_{μετά} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (I_{δίσκου} + m \cdot OA^2)\omega_{πριν} = (I_{δίσκου} + m \cdot OB^2)\omega_{μετά} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(I_{δίσκου} + m \cdot OA^2)}{(I_{δίσκου} + m \cdot OB^2)} = \frac{\omega_{μετά}}{\omega_{πριν}} \quad (1)$$

Αλλά $OA < OB$ (2)

Έτσι από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\omega_{μετά} < \omega_{πριν}$

B22)

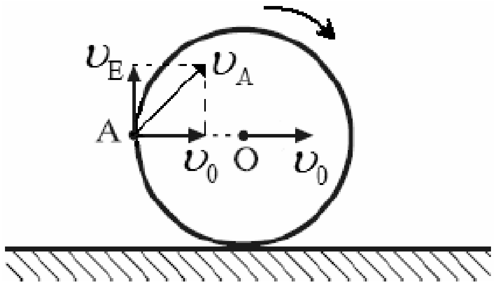
β – $\upsilon_A = \sqrt{2}\upsilon_0$

Αιτιολόγηση: Το σημείο Α έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, ίδια με αυτή του κέντρου μάζας λόγω μεταφορικής κίνησης και εφαπτομενική $\vec{\upsilon}_E$, λόγω της στροφικής κίνησης.

Από τη συνθήκη κύλισης ισχύει $\upsilon_0 = \omega \cdot R = \upsilon_E$, διότι το σημείο Α ανήκει στην περιφέρεια του κύκλου.

Επειδή ισχύει $\vec{\upsilon}_E \perp \vec{\upsilon}_0$, το μέτρο της $\vec{\upsilon}_A$ θα είναι:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_E^2} \xrightarrow{\upsilon_0 = \upsilon_E} \upsilon_A = \sqrt{2} \cdot \upsilon_0$$



B23)

β

Αιτιολόγηση :

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$L_{πριν} = L_{μετά} \Leftrightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Leftrightarrow \omega I_1 = \frac{5}{2}\omega I_2 \Leftrightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{5}{2}$$

B24)

Σωστή απάντηση : γ

$$\sum \tau = I \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\sum \tau}{I} = σταθ. \rightarrow \text{ομαλά επιταχ. κίνηση}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \overset{\omega = \alpha_\gamma t}{\Rightarrow} K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \alpha_\gamma{}^2 \cdot t^2$$

B25)

Σωστή απάντηση : **β**

Αιτιολόγηση :

$$\sum \tau = I \cdot \alpha_{γων,1} \Rightarrow$$

$$F \cdot R = I \cdot \alpha_{γων,1} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{γων,1} = \frac{F \cdot R}{I} \quad (1)$$

Για το σώμα

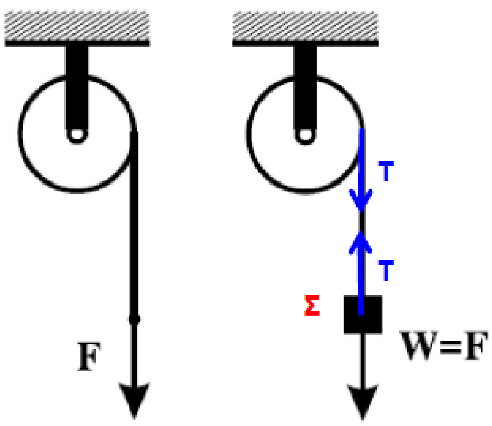
$$Σ: \sum F = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$F - T = m \cdot \alpha_{cm} \Leftrightarrow$$

$$F - T = m \cdot \alpha_{γων,2} \cdot R \quad (2)$$

Για την τροχαλία : $\sum \tau = I \cdot \alpha_{γων,2} \Rightarrow$

$$T \cdot R = I \cdot \alpha_{γων,2} \Leftrightarrow T = \frac{I \cdot \alpha_{γων,2}}{R} \quad (3)$$



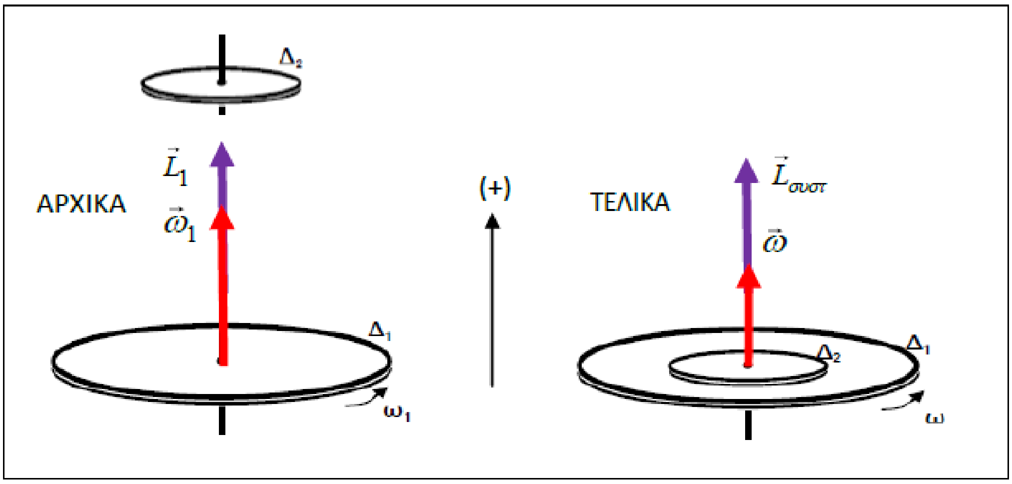
Από (2) και (3) προκύπτει $F - \frac{I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2}}{R} = m \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \cdot R \Leftrightarrow$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{F \cdot R}{I + m \cdot R^2} \quad (4)$$

$$(1), (4) \overset{(\div)}{\Rightarrow} \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu,1}}{\alpha_{\gamma\omega\nu,2}} = \frac{I + m \cdot R^2}{I} > 1, \text{ άρα } \alpha_{\gamma\omega\nu,1} > \alpha_{\gamma\omega\nu,2}$$

B26)

α. Σωστό είναι το **(ii)**.



Αφού $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0$ η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \xrightarrow{\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\alpha}} L_1 + 0 = L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow$$

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega \overset{I_2 = \frac{I_1}{4}}{\Rightarrow} I_1\omega_1 = \left(I_1 + \frac{I_1}{4}\right)\omega \Rightarrow I_1\omega_1 = \frac{5}{4}I_1\omega \Rightarrow \omega = \frac{4}{5}\omega_1 \ (1)$$

$\Delta\vec{L}_1 = \vec{L}_{1\tau\varepsilon\lambda} - \vec{L}_{1\alpha\rho\chi}$ *θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω*

$$\Rightarrow \Delta L_1 = L_{1\tau\varepsilon\lambda} - L_{1\alpha\rho\chi} = I_1\omega - I_1\omega_1 \overset{(1)}{=} \frac{4}{5}I_1\omega_1 - I_1\omega_1 = -\frac{1}{5}I_1\omega_1 = -\frac{1}{5}L_1$$

άρα $\left|\Delta L_1\right| = \frac{1}{5}L_1$

Όπου ω η κοινή γωνιακή ταχύτητα του συστήματος των δύο δίσκων.

<table>
<tr>
<td>Β27)</td>
<td>
α. Σωστό το ii)
β. Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση η επιτάχυνση με την οποία στρέφεται ο δίσκος είναι:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I}$$

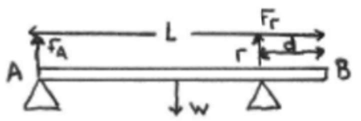
Από το διάγραμμα που δόθηκε παρατηρούμε ότι μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 (όπου $\Sigma\tau = 0$) είναι $\Sigma\tau > 0$, οπότε ο δίσκος επιταχύνεται. Αμέσως μετά γίνεται $\Sigma\tau < 0$ οπότε ο δίσκος επιβραδύνεται. Έτσι η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα επιτυγχάνεται τη χρονική στιγμή t_2 όπου είναι $\Sigma\tau = 0$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Β28)</td>
<td>
α. Σωστό το iii)
β. Επειδή Στεξ = 0 και δεν υπάρχουν τριβές με τον πάγο, η στροφορμή L της αθλήτριας παραμένει σταθερή.
$I_1 > I_2$ Όταν η αθλήτρια συμπτύσσει τα χέρια της η ροπή αδράνειας μειώνεται
Για την κινητική ενέργεια στερεού λόγω περιστροφής ισχύει:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{I^2\cdot\omega^2}{2\cdot I} = \frac{(I\cdot\omega)^2}{2\cdot I} => K = \frac{L^2}{2\cdot I}$$

Έστω K_1 και K_2 οι κινητικές ενέργειες λόγω περιστροφής της αθλήτριας με ανοιχτά χέρια και με συμπτυγμένα αντίστοιχα

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{L^2}{2\cdot I_1} \\ K_2 &= \frac{L^2}{2\cdot I_2} \end{aligned}\right\} => \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{\cancel{L^2}}{2\cdot I_1}}{\frac{\cancel{L^2}}{2\cdot I_2}} = \frac{I_2}{I_1} < 1 \Rightarrow K_1 < K_2$$

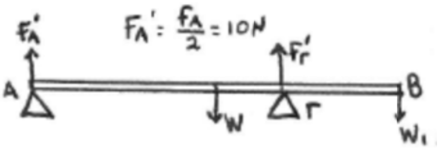
Η κινητική ενέργεια αυξάνεται.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Γ1)</td>
<td>
1.



$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Leftrightarrow -W\cdot\frac{L}{2} + F_\Gamma\,(L - d) = 0 \Leftrightarrow -50\cdot 1{,}5 + F_\Gamma\cdot 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow F_\Gamma = 30\ N$

$\Sigma F y = 0 \Leftrightarrow F_A + F_\Gamma - W = 0 \Leftrightarrow F_A = W - F_\Gamma \Leftrightarrow F_A = 20\ N$

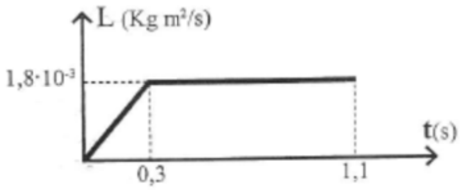
2.



$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Leftrightarrow -F_A\,(L - d) + W(\frac{L}{2} - d) - W_1\cdot d = 0 \Leftrightarrow$

$-10\cdot 2{,}5 + 50\ 1 - W_1\ 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow W_1 = 50\ N$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Γ2)</td>
<td>
α) $\tau_F = F\cdot R = 2\ N\cdot m$

β) $\Sigma\tau = I\ \alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \tau_F = \frac{1}{2}M R^2\ \alpha_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 5\ rad/s^2$
</td>
</tr>
</table>

	γ) $a_{γων} = \frac{Δω}{Δt} \Leftrightarrow a_{γων} = \frac{ω_2 - ω_1}{Δt} \Leftrightarrow Δt = 5s$ δ) $ΔK = \frac{1}{2}Iω_2^2 - \frac{1}{2}Iω_1^2 = \frac{1}{2}I(ω_2^2 - ω_1^2) = 175\ J$
Γ3)	α) $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}3\cdot 0,2^2 = 0,06\ kg\ m^2$ β) $τ_F = I_{cm}\ a_{γων} \Leftrightarrow F\cdot R = I_{cm}\ a_{γων} \Leftrightarrow a_{γων} = 10\ rad/s^2$ γ) $K = \frac{1}{2}I_{cm}ω^2 \Leftrightarrow 75 = \frac{1}{2}0,06\ ω^2 \Leftrightarrow ω = 50\ rad/s$ δ) $I = I_{cm} + M(\frac{R}{2})^2 = 0,06 + 3\cdot\frac{0,2^2}{4} = 0,09\ kg\cdot m^2$
Γ4)	α) Θ.Μ.Κ.Ε : $\frac{1}{2}Iω^2 + \frac{1}{2}m υ_{cm}^2 = mgh$ $\Rightarrow \frac{1}{2}I\frac{υ_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2}mυ_{cm}^2 = mg20R \Rightarrow I = 13,5\cdot10^{-6}kg\cdot m^2$ β) $\left.\begin{array}{l} ΣF = ma_{cm} \Rightarrow mg - T = ma_{cm} \\ Στ = I\ a_{γων} \Rightarrow T\cdot R = I\cdot\frac{a_{cm}}{R}\end{array}\right\}$ $a_{cm} = \frac{20}{3}m/s^2$, $T = 0,4\ N$ $\left\lvert\frac{dL}{dt}\right\rvert = T\cdot R = 6\cdot10^{-3}kg\cdot m^2/s^2$ γ) τη στιγμή που κόβεται το νήμα $L = Iω = I\frac{υ_{cm}}{R} = 18\cdot10^{-4}kgm^2/s$ από τη στιγμή που κόβεται το νήμα και μετά η στροφορμή διατηρείται σταθερή δ) ο χρόνος κατά τον οποίο ο κύλινδρος κατέρχεται με το νήμα να περιστρέφεται δίνεται από τη σχέση $S = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow 20R = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow t = 0,3s$ 
Γ5)	α) $W = τ_Fθ \overset{τ_F = FL}{\Rightarrow} W = FLθ \overset{θ=2π}{\Rightarrow} W = FL2π \Rightarrow F = \frac{W}{L2π} \Rightarrow F = \frac{30π}{2π} \Rightarrow F = 15N$ β) $Σ\vec{τ} = I\vec{a}_{γων} \Rightarrow τ_F = Ia_{γων} \Rightarrow FL = Ia_{γων}$ (1) $I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow I = 2kgm^2$ (1) $\Rightarrow a_γ = \frac{FL}{I} \Rightarrow a_γ = \frac{15}{2} \Rightarrow a_γ = 7,5rad/s^2$ γ) $ω = a_γ t \Rightarrow t = \frac{ω}{a_γ}$ (3) $θ = \frac{1}{2}a_γ t^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} θ = \frac{1}{2}a_γ\left(\frac{ω}{a_γ}\right)^2 \Rightarrow θ = \frac{1}{2}\frac{ω^2}{a_γ} \Rightarrow ω = \sqrt{2θa_γ}$

$\omega = \sqrt{2\cdot 2\pi\cdot 7{,}5} \Rightarrow \omega = \sqrt{30\pi} \Rightarrow \omega = 9{,}7rad/s$

$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta(\tau_F\theta)}{\Delta t} = \tau_F\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = FL\omega \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = 15\cdot 1\cdot 9{,}7 \Rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta t} = 145{,}5J/s$.

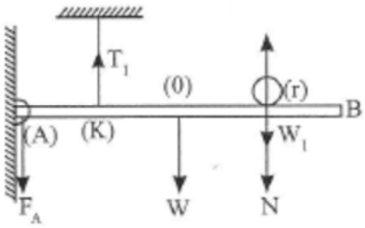
Γ6)

α) $1^{ος}$ Ν.Ν. (για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας) :

$\Sigma F = 0 \Rightarrow N - W_1 = 0 \Rightarrow N = W_1 \quad (1)$

$1^{ος}$ Ν.Ν. (για την περιστροφική κίνηση της ράβδου) :

$\Sigma\vec{\tau}_{(A)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_A} + \vec{\tau}_{T_1} + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_N = 0 \Rightarrow$



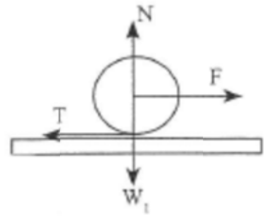
$T_1(AK) - W(AO) - N(A\Gamma) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$T_1\frac{\cancel{L}}{4} - Mg\frac{\cancel{L}}{2} - mg\frac{3\cancel{L}}{4} = 0 \Rightarrow T_1 = 4\left(\frac{Mg}{2} + \frac{3mg}{4}\right) \Rightarrow T_1 = 115N$

β) $2^{ος}$ Ν.Ν. (για τη μεταφορική κίνηση) :

$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \quad (1)$

$2^{ος}$ Ν.Ν. (για την περιστροφική κίνηση):



$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_T = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T\cancel{r} = \frac{2}{5}mr^{\cancel{2}}\alpha_\gamma \Rightarrow$

$T = \frac{2}{5}mr\alpha_\gamma \overset{a=\alpha_\gamma r}{\Rightarrow} T = \frac{2}{5}ma \quad (2)$

$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} F - \frac{2}{5}ma = ma \Rightarrow F = \frac{7}{5}ma \Rightarrow a = \frac{5F}{7m} \Rightarrow a = 2m/s^2$

γ) Για τη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{L}{4} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 = \frac{L}{2a} \Rightarrow t^2 = \frac{4}{2\cdot 2} \Rightarrow t = 1sec$

$\upsilon = at \Rightarrow \upsilon = 2\cdot 1 \Rightarrow \upsilon = 2m/s$

δ) $\upsilon = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{r} \Rightarrow \omega = \frac{2}{0{,}2} \Rightarrow \omega = 10rad/s$

$L = I\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega = \frac{2}{5}\cdot 2{,}5\cdot 0{,}2^2\cdot 10 \Rightarrow L = 0{,}4kgm^2/s$

Γ7)

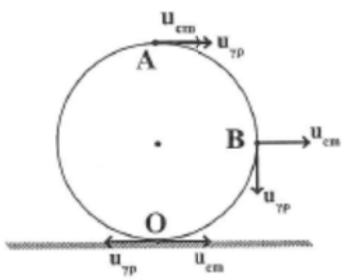
1) Η ταχύτητα των σημείων Α, Β και Ο υπολογίζεται από το διανυσματικό άθροισμα :

α) της ταχύτητας λόγω της μεταφορικής κίνησης $\vec{\upsilon}_{cm}$ και

β) της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ λόγω της περιστροφικής κίνησης

Δηλαδή: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$

Επειδή και τα τρία σημεία ανήκουν στην περιφέρεια της στεφάνης, ισχύει: $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\gamma\rho} = \omega R$



Για τη σημείο Α:

$\vec{\upsilon}_{(A)} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \overset{\vec{\upsilon}_{cm}\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}}{\Rightarrow} \upsilon_{(A)} = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_{(A)} = \upsilon_{cm} + \upsilon_{cm} \Rightarrow$

$\upsilon_{(A)} = 2\upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{(A)} = 2\cdot 10 \Rightarrow \upsilon_{(A)} = 20m/s$

Για το σημείο Β :

$\vec{\upsilon}_{(B)} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \overset{\vec{\upsilon}_{cm}\perp\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}}{\Rightarrow} \upsilon_{(B)}^2 = \upsilon_{cm}^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2 \Rightarrow \upsilon_{(B)}^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow \upsilon_{(B)}^2 = 2\cdot 10^2 \Rightarrow$

$\upsilon_{(B)} = 10\sqrt{2}\ m/s$

Για το σημείο O:

$$\vec{\upsilon}_{(O)} = \vec{\upsilon}_{cm} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho} \overset{\vec{\upsilon}_{cm}\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}}{\Rightarrow} \upsilon_{(O)} = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_{(O)} = \upsilon_{cm} - \upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_{(O)} = 0m/s$$

2) $\upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon_{cm}}{r} \Rightarrow \omega = \dfrac{10}{0,2} \Rightarrow \omega = 50rad/s$

3) Θεώρημα Steiner:

$$I = I_{cm} + mR^2 \overset{I_{cm} = mR^2}{\Rightarrow} I = mR^2 + mR^2 \Rightarrow I = 2mR^2 \Rightarrow I = 2\cdot1\cdot0,2^2 \Rightarrow$$
$$I = 0,08kgm^2$$

4) Η στεφάνη κάνει σύνθετη κίνηση, οπότε:

$$K = K_{\mu\varepsilon\tau} + K_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\cdot1\cdot10^2 + \frac{1}{2}4\cdot10^{-2}50^2 \Rightarrow$$
$$K = 100J$$

Γ8)

Γ1. $W = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \dfrac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2 = \dfrac{1}{4}\cdot M\cdot R^2\cdot\omega^2 \Rightarrow W = \dfrac{1}{4}\cdot2\cdot0,5^2\cdot8^2 = \mathbf{8J}$

Γ2. $\sum\tau = I\cdot\alpha_\gamma \Rightarrow FR = \dfrac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\alpha_\gamma \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \dfrac{2FR}{M\cdot R^2} \Rightarrow \alpha_\gamma = 20\ rad/s^2$

$\omega = \alpha_\gamma\cdot t \Leftrightarrow t = \dfrac{\omega}{\alpha_\gamma} \Rightarrow t = 0,4\ s$

$\Theta = \dfrac{1}{2}\cdot\alpha_\gamma\cdot t^2 \Rightarrow \mathbf{\Theta = 1,6\,rad}$

Γ3. $P = \tau\cdot\omega = F\cdot R\cdot\omega \Rightarrow \mathbf{P = 40w}$

Γ4. $I = \dfrac{1}{2}\cdot M\cdot R^2 \Rightarrow I = 0,25\ Kg\cdot m^2$

$\omega_1 = 8\ rad/s$

$I_2 = I_1 + M\cdot R^2 \Rightarrow I_2 = 0,5\ Kg\cdot m^2$

Αρχή διατήρησης στροφορμής : $L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$

$\mathbf{\omega_1 = 4\,rad/s}$

Γ9)

Γ1. Με εφαρμογή Steiner η ροπή αδράνειας της δοκού δίνεται:

$$I_\delta = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 \Rightarrow$$

$$I_\delta = \frac{4M\ell^2}{12} = \frac{M\ell^2}{3}.$$

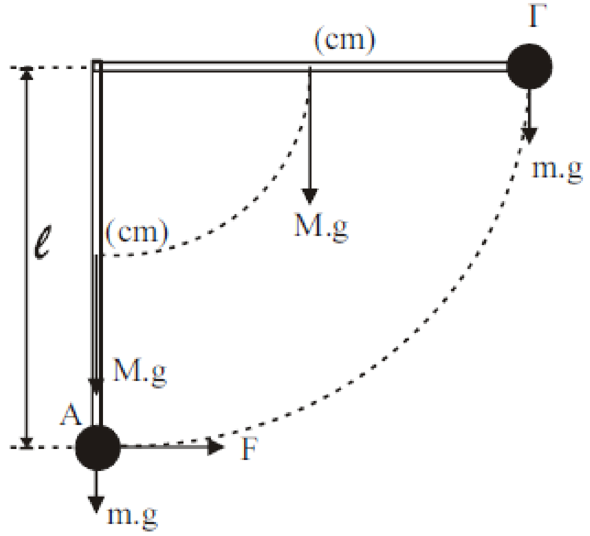
Άρα: $I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = I_\delta + I_{\sigma\varphi} = \dfrac{M\ell^2}{3} + m\ell^2 \Rightarrow$

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{M\ell^2}{3} + \frac{M\ell^2}{2} = \frac{5M\ell^2}{6} \Rightarrow$$

$$I_{συστ} = \frac{5\cdot 6\cdot 9\cdot 10^{-2}}{6} \Rightarrow I_{συστ} = 45\cdot 10^{-2}\,\text{Kg}\cdot\text{m}^2.$$

Γ2. Ισχύει: $W = \tau\cdot\theta = F\cdot\ell\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow W = \frac{120}{\pi}\cdot 3\cdot 10^{-1}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow W = 18$ J.

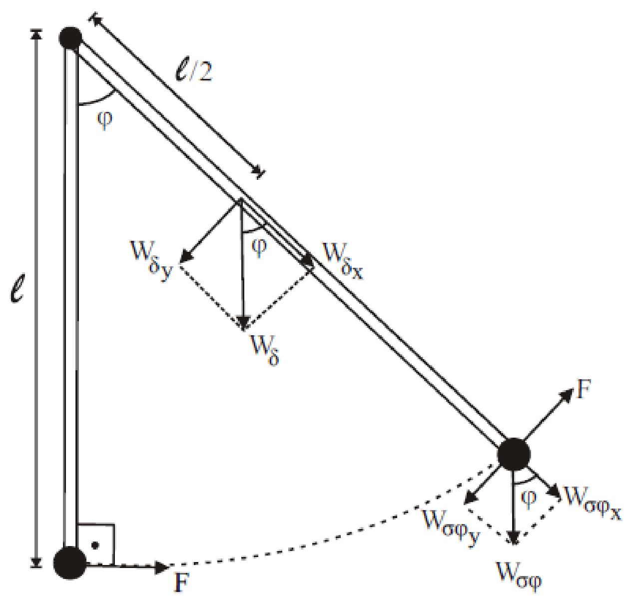
Γ3. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. κατά την περιστροφή του συστήματος από τη θέση Α στη θέση Γ.



$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} I_{συστ}\cdot\omega^2 = W_F + W_{βαρ_{(σφ)}} + W_{βαρ_{(δ)}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}0,45\cdot\omega^2 = 18 - m\cdot g\cdot\ell - M\cdot g\cdot\frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

Γ4.



Μέγιστη κινητική ενέργεια έχουμε όταν $\omega = \omega_{max}$ δηλαδή τη στιγμή που $\alpha_{γων} = 0$.
Όμως $\Sigma\tau = I_{συστ} \cdot \alpha_{γων} \Rightarrow \Sigma\tau = 0$.

Έστω $\hat{\varphi}$ η γωνία που σχηματίζει η δοκός με την κατακόρυφη στη θέση αυτή.

Ισχύει: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow W_{δ_y} \cdot \frac{\ell}{2} + W_{σφ_y} \cdot \ell = F \cdot \ell \Rightarrow$

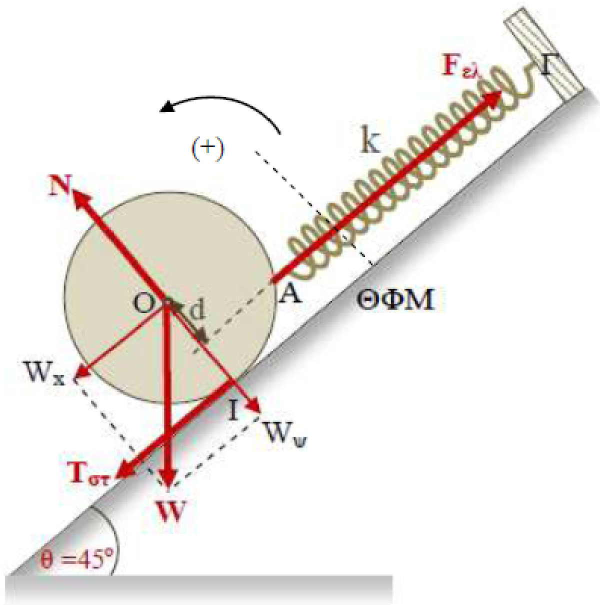
$$M \cdot g \cdot ημ\varphi \cdot \frac{1}{2} + m \cdot g \cdot ημ\varphi = F \Rightarrow$$

$$ημ\varphi = \frac{F}{\left(\frac{M}{2} + m\right) \cdot g} = \frac{30\sqrt{3}}{6 \cdot 10} \Rightarrow ημ\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα: $\hat{\varphi} = 60°$.

Γ10)

Γ1. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο είναι η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$, το βάρος W, και η δύναμη του δαπέδου που αναλύεται σε δυο συνιστώσες N και $T_{στ}$ όπως φαίνεται στο σχήμα :



Η ροπή της $F_{ελ}$ είναι αντιωρολογιακή , άρα της στατικής τριβής πρέπει να είναι ωρολογιακή , γι αυτό η $T_{στ}$ πρέπει να έχει φορά προς τα κάτω, ομόρροπη με τη W_x.

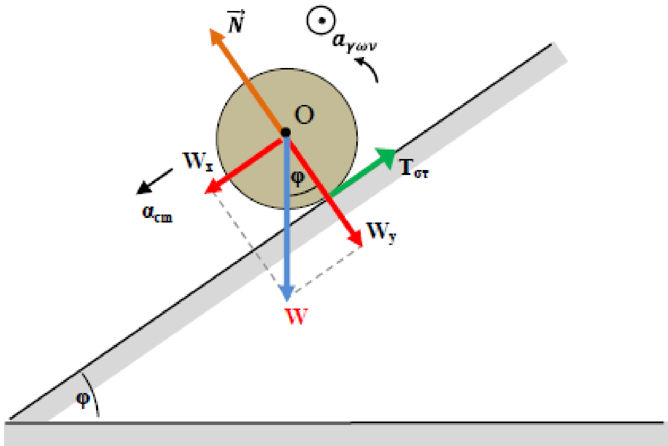
Επειδή ο δίσκος ισορροπεί: $\Sigma\tau_O = 0 \Rightarrow -T_{στ}R + F_{ελ}\frac{R}{2} = 0 \Rightarrow T_{στ} = \frac{F_{ελ}}{2}$ (1) και

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = T_{στ} + Mgημ\varphi \xrightarrow{(1)} F_{ελ} = \frac{F_{ελ}}{2} + Mgημ\varphi \Rightarrow \frac{F_{ελ}}{2} = Mgημ\varphi \Rightarrow F_{ελ} = 2Mgημ\varphi \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} N \Rightarrow \boxed{F_{ελ} = 40N} \ (2) \ \Rightarrow k\Delta\ell = 40N \Rightarrow \boxed{\Delta\ell = 0,4m}.$$

Γ2. Από (1) και (2) προκύπτει ότι η στατική τριβή έχει μέτρο $\boxed{T_{στ} = 20N}$ με διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα κάτω, όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Γ3. Όταν το ελατήριο κόβεται και ο δίσκος αφήνεται να κυλίσει χωρίς ολίσθηση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου οι δυνάμεις που του ασκούνται είναι το βάρος W, η κατακόρυφη αντίδραση του δαπέδου και η στατική τριβή με φορά προς τα πάνω (για να τον περιστρέψει αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού μιας και οι υπόλοιπες δυνάμεις δε δημιουργούν ροπή).



Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική κίνηση (ΣFx = Mα) και για τη στροφική κίνηση (Στ(ο)= Ια$_{γων}$) του δίσκου έχουμε:

$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - \mathbf{T_{\sigma\tau}} = \mathbf{M\alpha_{cm}}$ **(3)** και

$$\Sigma\tau_{(O)} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\underbrace{R\alpha_{\gamma\omega\nu}}_{\alpha_{cm}} \Rightarrow \mathbf{T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm}} \ \mathbf{(4).}$$

Από (3) + (4) έχουμε: $Mg\eta\mu\varphi = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{3}{2}M\alpha_{cm} = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\mu\varphi$

$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = \frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}}$ m/s² με διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τα κάτω.

Γ4. Αφού ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$s = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_{cm}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,3\sqrt{2}\cdot 3}{10\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}s = 0,3\sqrt{2}\ s.$$

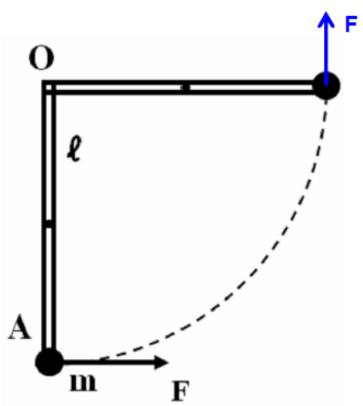
Άρα για το μέτρο της στροφορμής θα έχουμε:

$$L_1 = I\omega_1 = \frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_{cm_1}}{R} = \frac{1}{2}MR\upsilon_{cm_1} = \frac{1}{2}MR\alpha_{cm}t_1 = \frac{1}{2}2\sqrt{2}\cdot 0,1\cdot\frac{10\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{6\sqrt{2}}{30} \Rightarrow$$

$$\boxed{L_1 = 0,2\sqrt{2}}\ Kg\frac{m^2}{s}.$$

Γ11)

M = 6 Kg, ℓ = 0,3m, $m = \frac{M}{2} = 3$ Kg



Γ1. $I_{ΣΥΣΤ(A)} = \left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4}\right) + m\ell^2$

$= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}\cdot 0,3^2 + 3\cdot 0,3^2$

$= 5\cdot 0,3^2 = 0,45$ Kg·m²

Γ2. $F = \frac{120}{\pi}$ N

$$W_F = \tau_F \cdot \theta = F \cdot \ell \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{120}{\cancel{\pi}} \cdot 0{,}3 \cdot \frac{\cancel{\pi}}{2} = 18\ J$$

Γ3. ΘΜΚΕ (Ι $\rightarrow$ ΙΙ)

$$\Delta K = W_F + W_{\rho\alpha\beta} + W_{(m)}$$

$$\frac{1}{2} \cdot I_{ΣΥΣΤ(A)} \cdot \omega^2 = W_F - Mg\frac{\ell}{2} - mg\ell \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}45 \cdot \omega^2 = 18 - 60\frac{0{,}3}{2} - 30 \cdot 0{,}3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}45 \cdot \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

Γ4. Εφαρμόζουμε Θεώρημα έργου-ενέργειας

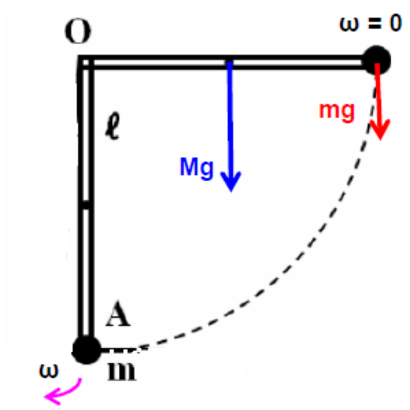
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \sum W \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} I_{\sigma\upsilon\sigma\tau(O)} \cdot \omega^2 = mg\ell + \frac{M}{2} g\ell \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 0{,}45 \cdot \omega^2 = Mg\ell = 18\ J \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{3600}{45} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{60}{3\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}\ rad/s$$

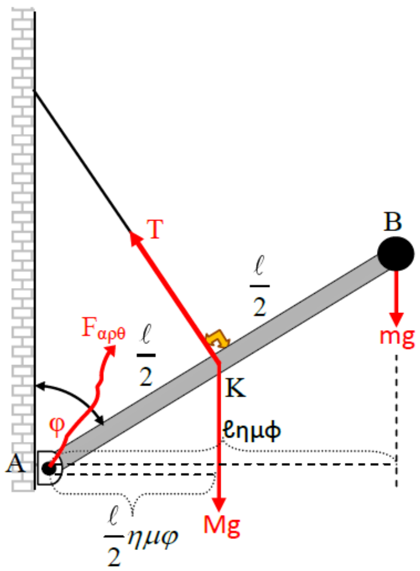


Από διατήρηση στροφορμής έχουμε :

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau(O)} \cdot \omega = m_1 \cdot u_1 \cdot \ell \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{I_{\sigma\upsilon\sigma\tau(O)} \cdot \omega}{m_1 \cdot \ell} = \frac{0{,}45 \cdot 4\sqrt{5}}{0{,}9} = 2\sqrt{5}\ m/s$$

Γ12)



Γ1. Είναι:

$$I_{o\lambda(A)} = I_{\rho\alpha\beta\delta(A)} + I_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho(A)} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2$$

$$= \frac{1}{3}(6\,kgr)(3\,m)^2 + (1\,kgr)(3\,m)^2$$

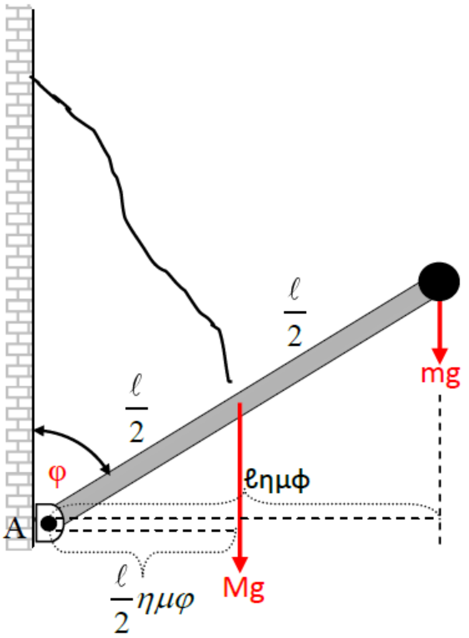
άρα $I_{o\lambda(A)} = \underline{27\,kgr \cdot m^2}$

Γ2. Πάνω στο σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο ενεργούν τέσσερις δυνάμεις, το βάρος της ράβδου Mg, το βάρος του σφαιριδίου mg, η τάση του νήματος T και η δύναμη από την άρθρωση $F_{\alpha\rho\theta}$.. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(A)} = 0 \overset{(+)}{\leftrightarrow} T \cdot \frac{\cancel{\ell}}{2} - Mg\frac{\cancel{\ell}}{2}\eta\mu\varphi - mg\cancel{\ell}\eta\mu\varphi = 0$$

Και μετά την απλοποίηση:

$T = (M + 2m)g\eta\mu\varphi \overset{(S.I)}{=} (6+2)\cdot 10 \cdot 0,6 = \underline{48\,N}$



Γ3.

Η γωνιακή επιτάχυνση οφείλεται μόνο στις ροπές των δύο βαρών ως προς την άρθρωση Α. Θα την υπολογίσουμε με τη βοήθεια του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\overrightarrow{\tau_{(A)}} = I_{(A)}\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$$

Θεωρώντας τη δεξιόστροφη φορά περιστροφής θετική, από την παραπάνω σχέση προκύπτει η εξής αλγεβρική:

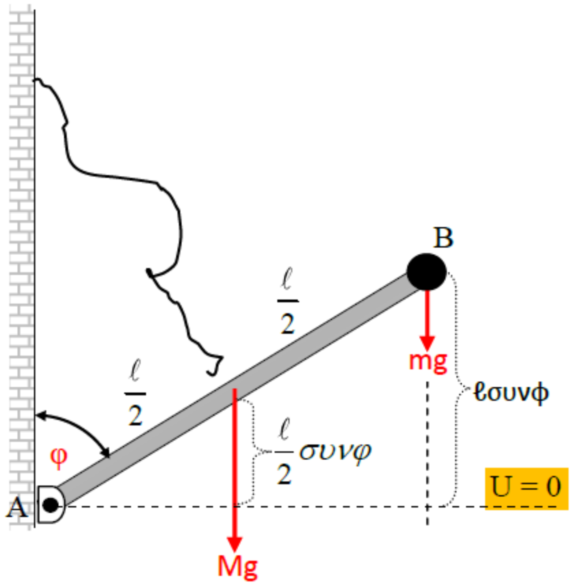
$$Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi + mg\ell\,\eta\mu\varphi = I_{(A)}\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Άρα

$$(6\,kgr)(10\,m/s^2)(1,5\,m)\cdot 0,6 + (1kgr)(10\,m/s^2)(3\,m)\cdot 0,6 = (27\,kgr\cdot m^2)\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Απ' όπου: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{8}{3} r/s^2$

Γ4.



Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε από την αρχική θέση της ράβδου μέχρι τη θέση όπου γίνεται οριζόντια:

$$Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + mg\ell\,\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2$$

(Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας θεωρούμε αυτό που διέρχεται από την οριζόντια θέση της ράβδου).

Άρα:

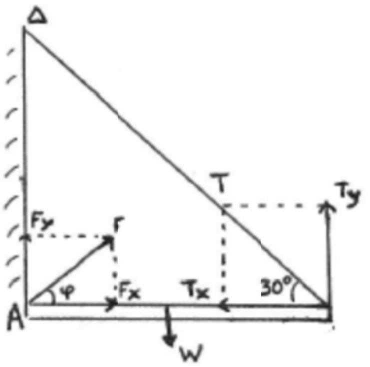
$$6\cdot 10\cdot 1,5\cdot 0,8 + 1\cdot 10\cdot 3\cdot 0,8 = \frac{1}{2}27\cdot\omega^2$$

(Όλα τα μεγέθη στο S.I)

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει: $\omega = \frac{8}{3} r/s$, άρα $\upsilon_B = \omega\ell = \left(\frac{8}{3} r/s\right)(3\,m) = \underline{8\,m/s}$

Δ1)

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -W\cdot\frac{(A\Gamma)}{2} + Ty\,(A\Gamma) = 0 \Rightarrow -15 + Ty = 0 \Rightarrow Ty = 15N$$



$$Ty = T\,\eta\mu 30^{o} \Rightarrow T = 30\ N$$

$$Tx = T\sigma\upsilon\nu 30^{o} \Rightarrow Tx = 15\sqrt{3}\,N$$

$$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow Fx = Tx \Rightarrow Fx = 15\sqrt{3}\,N$$

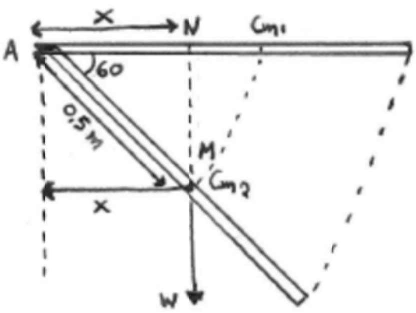
$$\Sigma Fy = 0 \Rightarrow Fy + Ty - W = 0 \Rightarrow Fy = 15\ N$$

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{15^2\cdot 3 + 15^2} = 30\ N$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{Fy}{Fx} = \frac{15}{15\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

B. 1 $\tau_w = I_A \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow W\frac{(A\Gamma)}{2} = I_A\, a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 15\ rad/s^2$

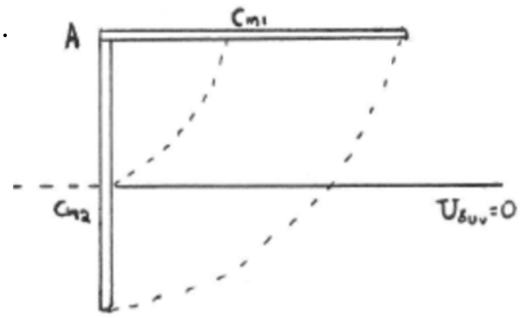
2.



$$\left|\frac{dL}{dt}\right| = |\tau_w| = W\cdot x = 30\ \frac{1}{4} = 7{,}5\ kgm^2/s^2$$

$$A\overset{\triangle}{N}M \rightarrow \sigma\upsilon\nu 60^{o} = \frac{x}{0{,}5} \Rightarrow x = \frac{1}{4}\ m$$

3.



Α.Δ.Μ.Ε.

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$M\,g\,\frac{(A\Gamma)}{2} = K_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = 15\ J$$

Δ2)

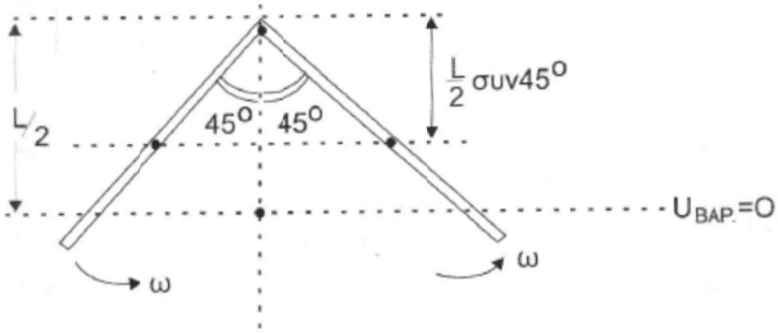
A. $I_{(0)} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\ M\cdot L^2 + M\cdot\frac{L^2}{4} = \frac{4}{12}\cdot M\cdot L^2 = \frac{1}{3}\ M\cdot L^2 = \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 1{,}5^2 =$

$= 3\ kg\cdot m^2 \Rightarrow I_{(0)} = 3\ kg\cdot m^2$

B. Ισχύει : $\Sigma\vec{\tau} = 2I_{(0)}\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{BAPOY\Sigma} = 2\cdot I_0\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow M\cdot g\,\frac{L}{2} = 2\cdot I_0\cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{M\cdot g\cdot L}{4\cdot I_0} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{4\cdot 10\cdot 1{,}5}{4\cdot 3} = 5\ \frac{rad}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 5\ \frac{rad}{s^2}$$

Γ.



α) Εφαρμογή αρχής διατήρησης μηχανικής ενέργειας από την αρχική θέση μέχρι την τελική θέση :

$$K_{ΑΡΧ} + U_{ΑΡΧ} = K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot g \cdot \frac{L}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_{(0)} \cdot \omega^2 + 2M \cdot g\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{2}συν45^\circ\right) =$$

$$\Rightarrow M \cdot g \cdot \frac{L}{2} = I_{(0)} \cdot \omega^2 + M \cdot g \cdot L \cdot (1 - συν45^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \cdot g \cdot \frac{L}{2} - M \cdot g \cdot L \cdot (1 - συν45^\circ) = I_{(0)} \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\left[M \cdot g \cdot \frac{L}{2} - M \cdot g \cdot L \cdot (1 - συν45^\circ)\right] \cdot \frac{1}{I_{(0)}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\left[\frac{4 \cdot 10 \cdot 1{,}5}{2} - 4 \cdot 10 \cdot 1{,}5 \cdot (1 - 0{,}7)\right] \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt{[30 - 60 \cdot 0{,}3] \cdot \frac{1}{3}} = 2\frac{rad}{s}$$

β) $L_1 = L_2 = I_{(0)} \cdot \omega = 6\ kgr\ \frac{m^2}{s}$

Δ3)

α) $I_{συστ} = I_0 + m L^2 = \frac{1}{3}\ M L^2 + m L^2 = \frac{1}{3}\ 0{,}3 \cdot 2^2 + 0{,}1 \cdot 2^2 = 0{,}8\ kgm^2$

$L_{συστ} = I_{συστ} \cdot \omega = 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8\ kg \cdot m^2/s$

β) $υ = \omega \cdot L = 1 \cdot 2 = 2\ m/s$

γ) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{20}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = 2\pi\frac{1}{10} = \frac{\pi}{5} = 0{,}2\ \pi\ s$

δ) Α.Δ.Ο

$\vec{P}_{ολ(αρχ)} = \vec{P}_{ολ(τελ)}$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} = 10\ rad/s$

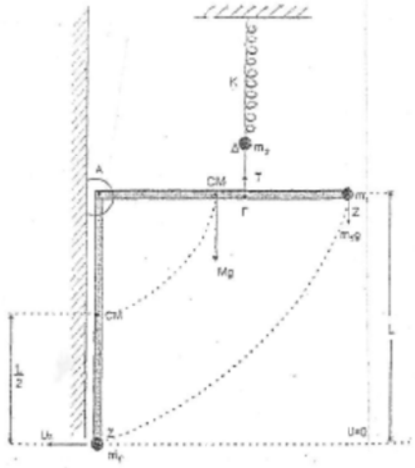
$\cancel{m}\, υ = 2\, \cancel{m}\, υ'$

$υ' = \frac{υ}{2} = 1\ m/s$

$υ' = υ_{max} = \omega A \Rightarrow A = 0{,}1\ m$

Δ4)

Α.1 Βρίσκουμε πρώτα από το Θεώρημα του Steiner τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Α :



$$I_A = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\ M\cdot L^2 + \frac{ML^2}{4} = 16\ kg\cdot m^2$$

Κατόπιν βρίσκουμε τη ροπή αδρανείας του σώματος μάζας m_1 :

$I_1 = m_1 L^2 = 9{,}6\ kg\ m^2$

Άρα $I_{ολ} = I_A + I_1 = 25{,}6\ kg\cdot m^2$

Α.2 Εφόσον έχουμε ισορροπία θα πρέπει :

$\Sigma Fx = 0$ (1)

$\Sigma Fy = 0$ (2) και

$\Sigma \tau = 0$ (3)

Από τη σχέση (3) , θεωρώντας ροπές ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο Α και θετική φορά ροπών την αντίθετη από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού, προκύπτει :

$$\Sigma\tau = T\cdot(ΑΓ) - Mg\,\frac{L}{2} - m_1 gL = 0 \Rightarrow T = 30N$$

Β.1 Ο χρόνος που χρειάζεται ένα κινητό που κάνει Α.Α.Τ να μεταβεί από μία ακραία θέση στην άλλη είναι $t = T/2$. Άρα $t = \pi\sqrt{\frac{m_2}{K}} = 0{,}314s$

Β.2 Επειδή δεν υπάρχουν τριβές , εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε , θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από το κατώτερο σημείο Ζ.

Προκύπτει ότι :

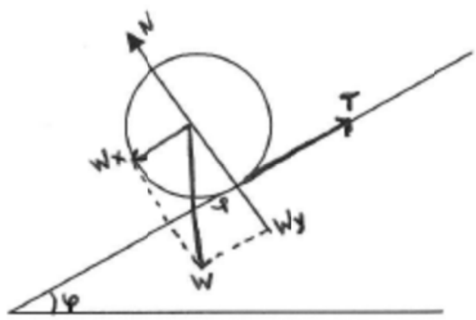
$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 + MgL + m_1 gL = \frac{1}{2} I_{ολ}\omega^2 + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{105}}{4} rad/s$$

Άρα το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Ζ θα είναι :

$u_Z = \omega L = \sqrt{105}\ m/s$

Δ5)



α) $\upsilon_0 = \omega_0 R \Rightarrow \omega_0 = \frac{\upsilon_0}{R} = 80\ rad/s$

β) $Wx = Wημφ = 56\ N$

Μεταφορική	Στροφική
$\lvert\Sigma Fx\rvert = m\lvert a_{cm}\rvert$	$\lvert\Sigma\tau\rvert = I\cdot\lvert a_{γων}\rvert$
$Wx - T = m\lvert a_{cm}\rvert$	$T\,R = \frac{2}{5} m R^2 \lvert a_{γων}\rvert$
$\boxed{56 - T = 10\ \lvert a_{cm}\rvert}$ (1)	$T = \frac{2}{5} m R \lvert a_{γων}\rvert$

$T = \frac{2}{5} m |a_{cm}|$

$\boxed{T = 4|a_{cm}|}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε : $56 - 4a_{cm} = 10\,|a_{cm}| \Rightarrow |a_{cm}| = 4\ m/s^2$

γ) $\left|\frac{dL}{dt}\right| = |\Sigma\tau| = I|a_{\gamma\omega\nu}| = \frac{2}{5} mR^2 \frac{|a_{cm}|}{R} = 1{,}6\ kg\ m^2/s^2$ (ή αλλιώς $\Sigma\tau = T\cdot R$)

δ) $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{30}{\pi} 2\pi = 60\ rad$ $\quad a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = 40\ rad/s^2$

$\Delta\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} t^2$

$60 = 80\,t - \frac{1}{2} 40\, t^2$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4\cdot 3 = 4$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$ → 3s, 1s

Ο χρόνος ανόδου είναι :

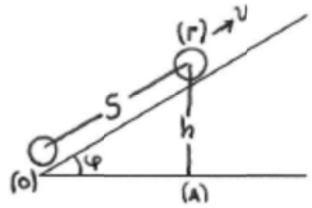
$\omega = \omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} t_{\alpha\nu} \Rightarrow 0 = 80 - 40\, t_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = 2\ s$

άρα δεκτή λύση $t = 1\ s$

$\omega = \omega_0 - a_{\gamma\omega\nu} t_{\alpha\nu} = 80 - 40\cdot 1 = 40\ rad/s$

$\upsilon_{cm} = \omega\cdot R = 40\cdot 0{,}1 = 4\ m/s$

δ) Άλλος τρόπος : $O\hat{A}\Gamma$ $\quad \eta\mu\varphi = \frac{h}{s}$ $\quad h = S\eta\mu\varphi$



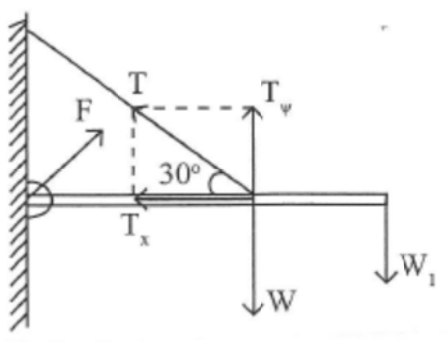
$S = \Delta\theta\, R = 6\ m$ $\quad$ άρα $\quad h = 3.36\ m$

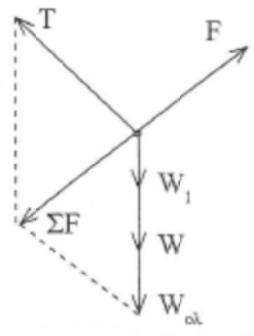
ΑΔΜΕ (0) →(Γ)

$\frac{1}{2} I\omega_0^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{cm}^{\ 2} = M g h + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon^2 \Leftrightarrow \upsilon = 4\ m/s$

(αντικαθιστώ το $\omega = \frac{\upsilon}{R}$)

Δ6)





Α1) $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{W_1} + \vec{\tau}_{T_x} + \vec{\tau}_{T_\psi} + \vec{\tau}_F = 0 \Rightarrow -\tau_W - \tau_{W1} + \tau_{T\psi} = 0 \Rightarrow$

$-W\frac{\ell}{2} - W_1\ell + T\eta\mu 30\frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow T\frac{1}{4} = \frac{W}{2} + W_1 \Rightarrow T = 2W + 4W_1 \Rightarrow T = 200N$

Α2) $I_{o\lambda} = I_\rho + I_{\sigma\varphi}$ (1)

$$I_\rho = I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}M\ell^2 \Rightarrow I_\rho = \frac{1}{3}6\cdot 1^2 \Rightarrow I_\rho = 2kgm^2$$

$$I_{\sigma\varphi} = m\ell^2 = 2\cdot 1^2 \Rightarrow I_{\sigma\varphi} = 2kgm^2$$

$$(1) \Rightarrow I_{o\lambda} = 2 + 2 = 4kgm^2$$

B1) $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{a}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_W + \vec{\tau}_{W_1} = I\vec{a}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_W + \tau_{W1} = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow W\frac{\ell}{2} + W_1\ell = Ia_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{60\frac{1}{2}+20\cdot 1}{4} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 12{,}5rad/s^2$$

B2) $K + U = K' + U' \Rightarrow (M + m)g\ell = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow$

$$\omega^2 = \frac{2(M+m)g\ell - Mg\ell}{I} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2(6+2)10\cdot 1 - 6\cdot 10\cdot 1}{4} = 25 \Rightarrow$$

$$\omega = 5rad/s$$

$$\upsilon = \omega\ell \Rightarrow \upsilon = 5\cdot 1 \Rightarrow \upsilon = 5m/s$$

Δ7)

α) $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow -W\cdot\frac{\ell}{2} - F\cdot\ell + F_B\cdot\frac{3\ell}{4} = 0 \Leftrightarrow F_B = 32N$

β) Το m ισορροπεί άρα T = B $\Leftrightarrow T = 10N$

Το στερεό ισορροπεί άρα $\Sigma\tau = 0$

γ) Θ.Ν $\begin{cases} \text{Μεταφορικη κινηση}: |\Sigma F| = m.|a_{cm}| \Rightarrow W - T' = m.a_{cm} = 10 - T' = a_{cm} & (1) \\ \text{Στροφικη κινηση}: |\Sigma\tau| = I|a_{\gamma\omega\nu}| \Rightarrow T'.R_1 = I.a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T'.R_1 = I\frac{a_{cm}}{R_1} \Rightarrow T' = 9.a_{cm} & (2) \end{cases}$

από (1) και (2) $\boxed{a_{cm} = 1m/s^2}$ και $\boxed{T' = 9\ N}$

$\Delta x = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow t = 1s$, $\upsilon = a_{cm}.t \Rightarrow \upsilon = 1m/s$

δ) $\frac{dw}{dt} = \frac{\tau.d\theta}{dt} = \tau.\omega = T'.R_1.a_{\gamma\omega\nu}.t = T'.a_{cm}.t = 9J/s$

Δ8)

α) Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε για το σφαιρίδιο (m):

$K + U = K' + U' \Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1^2 = 2gh \Rightarrow \upsilon_1^2 = 2\cdot 10\cdot 0{,}8 = 16 \Rightarrow \upsilon_1 = 4m/s$

β) Εφαρμόζουμε Α.Δ.Σ.:

$\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_{o\lambda}{}' \Rightarrow \vec{L}_\rho + \vec{L}_{\sigma\varphi} = \vec{L}_\rho{}' + \vec{L}_{\sigma\varphi}{}' \Rightarrow L_{\sigma\varphi} = L_\rho{}' \Rightarrow I_{\sigma\varphi}\omega = I_\rho\omega' \Rightarrow$

$m\ell^2\omega = \left[I_{cm} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]\omega' \Rightarrow m\ell^2\omega = [\frac{1}{2}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4}]\omega' \overset{\upsilon_1=\omega\ell}{\Rightarrow} m\cancel{\ell}\upsilon_1 = \frac{1}{3}M\ell^{\cancel{2}}\omega' \Rightarrow$

$$\omega' = \frac{3m\upsilon_1}{M\ell} \Rightarrow \omega' = 1rad/s$$

γ) $\upsilon_{cm} = \omega'\frac{\ell}{2} = 1\frac{2}{2} \Rightarrow \upsilon_{cm} = 1m/s$

δ) Α.Δ.Ε. (για την κρούση):

$E_\mu = E_\mu{}' + Q \Rightarrow Q = E_\mu - E_\mu{}' = K + U - (K' + U') \Rightarrow Q = K + \cancel{U} - K' - \cancel{U'} \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$$Q = K - K' \Rightarrow Q = \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{1}{2}I\omega'^2 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}mu_1^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega'^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2}0{,}5\cdot 4^2 - \frac{1}{6}3\cdot 2^2\cdot 1^2 \Rightarrow Q = 4 - 2 \Rightarrow Q = 2\text{Joule}$$

(*) U = U΄ γιατί πριν και μετά την κρούση τα σώματα βρίσκονται στην ίδια θέση

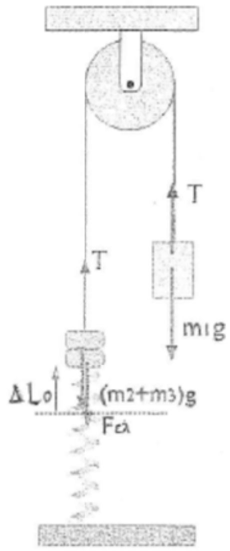
ε) Α.Δ.Μ.Ε. (για την περιστροφική κίνηση της ράβδου):

$$K + U = K' + U' \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega'^2 = MgH \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}\cancel{M}\ell^2\omega'^2 = \cancel{M}gH \Rightarrow$$

$$H = \frac{\ell^2\omega'^2}{6g} \Rightarrow H = \frac{1}{15}m.$$

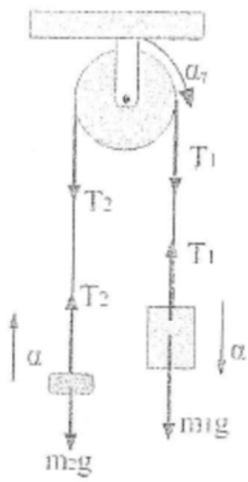
Δ9)

α) Στο σχήμα βλέπουμε την αρχική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος. Οι δυο τάσεις έχουν ίσα μέτρα αφού η τροχαλία ισορροπεί άρα η συνισταμένη των ροπών πάνω της είναι μηδέν.
Για το σώμα m_1 ισχύει: $m_1g = T = 40N$
Για το σύστημα $m_2 + m_3$ θα ισχύει: $T = (m_2 + m_3)g + K\Delta L_0$ άρα :
$\Delta L_0 = 20cm$
Όταν τα δυο σώματα αποκολληθούν τότε το $Σ_3$ θα εκτελέσει ταλάντωση γύρω από τη Θ.Ι. στην οποία θα ισχύει: $K\Delta L = m_3g$ άρα $\Delta L = 10cm$.
Προσοχή όμως η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του m_3 βρίσκεται 10cm κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου ενώ η αρχική θέση του m_3 βρίσκεται 20cm πάνω από τη θέση φυσικού μήκους.
Άρα η ταλάντωση του m_3 θα έχει πλάτος $A = 0{,}3m$.



β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $y = 0{,}3ημ(10t + \frac{\pi}{2})m$

γ) Παρατηρείστε το διπλανό σχήμα που δείχνει το σύστημα μετά την αποκόλληση των $Σ_2$ και $Σ_3$.
Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους για κάθε στερεό
$m_1g - T_1 = m_1\alpha$
$T_2 - m_2g = m_2\alpha$
$(T_1 - T_2)R = MR^2\alpha_\gamma/2$
Αφού του νήμα δε γλιστρά πάνω στη τροχαλία θα είναι $\alpha = \alpha_\gamma R$
οπότε οι εξισώσεις γίνονται:
$m_1g - T_1 = m_1\alpha_\gamma R$
$T_2 - m_2g = m_2\alpha_\gamma R$
$T_1 - T_2 = MR\alpha_\gamma/2$
Προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε: $\alpha_\gamma = 15rad/s^2$



δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας θα είναι ίσος με την ισχύ της συνισταμένης των ροπών πάνω της.

$$\frac{dK}{dt} = \tau_{ολ}\omega = I\alpha_\gamma\omega = I\alpha_\gamma^2 t = 4{,}2J/s$$

Δ10)

α) Για την ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση του σώματος ισχύει:

$$\begin{aligned} &\upsilon = a_{cm}t & & 5 = a_{cm}t \\ &\Delta x = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 & \text{δηλαδή} \quad & \frac{5}{3} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \end{aligned}\Bigg\} \quad \text{Λύνω το σύστημα και έχω } t = \frac{2}{3}\text{s και } a_{cm} = 7{,}5\text{m/s}^2$$

β) Ισχύει $a_{cm} = a_{γων}\cdot R$ δηλαδή $a_{γων} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{7{,}5}{0{,}1} = 75\text{rad/s}^2$.

Από το Θεμελιώδη νόμο για την μεταφορική κίνηση έχω $|\Sigma F| = M|a_{cm}| \Leftrightarrow$
$M\cdot g - T = M|a_{cm}| \Leftrightarrow 60 - T = 6\cdot 7{,}5 \Leftrightarrow T = 15\text{N}$

γ) Από το Θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση έχω $|\Sigma\tau| = I|a_{γων}| \Leftrightarrow T\cdot R = I\cdot a_{γων}$
$\Leftrightarrow 1{,}5 = I\cdot 75 \Leftrightarrow I = 0{,}02\text{kgm}^2$

Έτσι ο λόγος της στροφικής κινητικής ενέργειας προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια είναι:

$$\frac{K_{στροφ}}{K_{μετ}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2} \Leftrightarrow \frac{K_{στροφ}}{K_{μετ}} = \frac{I\omega^2}{M\omega^2R^2} \Leftrightarrow \frac{K_{στροφ}}{K_{μετ}} = \frac{I}{MR^2} \Leftrightarrow \frac{K_{στροφ}}{K_{μετ}} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{6\cdot(10^{-1})^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{\frac{K_{στροφ}}{K_{μετ}} = \frac{1}{3}}.$$

δ) $K_{στρ} = \frac{1}{2}I\omega^2$ όμως $\omega = a_{γων}t = 75t$ άρα $K_{στρ} = \frac{1}{2}0{,}02\cdot 75^2\cdot t^2$ δηλαδή
$K_{στρ} = 56{,}25t^2$ (S.I.)

Δ11)

α) Εφαρμόζουμε για την οριζόντια θέση τον Θεμελιώδη νόμο και έχουμε $\Sigma\tau_{(A)} = I_{(A)}\cdot a_{γων}$
$\Leftrightarrow Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2a_{γων} \Leftrightarrow a_{γων} = 50\text{rad/s}^2$

β) Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τη στροφική κίνης της ράβδου από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση και έχουμε $Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow \cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\omega^2 \Leftrightarrow$
$\omega = 10\text{rad/s}$ άρα $L = I\omega = 0{,}36\text{kgm}^2/\text{s}$

γ) Εφαρμόζουμε Α.Δ.Σ. για την κρούση και έχουμε $I\cdot\omega = I\cdot\frac{\omega}{5} + m\upsilon L$ και προκύπτει
$\upsilon = 2{,}4\text{m/s}$

δ) Το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{K_{\underset{αρχ}{συστ}} - K_{\underset{τελ}{συστ}}}{K_{\underset{αρχ}{συστ}}}100\% = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2 - \left[\frac{1}{2}I\left(\frac{\omega}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2\right]}{\frac{1}{2}I\omega^2}100\%$ και
προκύπτει περίπου 32% (31,89%).

Δ12)

α, β) Από τον Θεμελιώδη νόμο για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε $|\Sigma F_x| = m|a_{cm}| \Leftrightarrow W_x - T = m|a_{cm}|$ (1) και $|\Sigma\tau| = I|a_{γων}| \Rightarrow$
$T\cdot\cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}|a_{γων}|$ όμως $R|a_{γων}| = |a_{cm}|$ οπότε $T = \frac{1}{2}M|a_{cm}|$ (2). Λύνω το σύστημα (1) και (2) και πάρνω $a_{cm} = 4\text{m/s}^2$ και $T = 4\text{N}$.

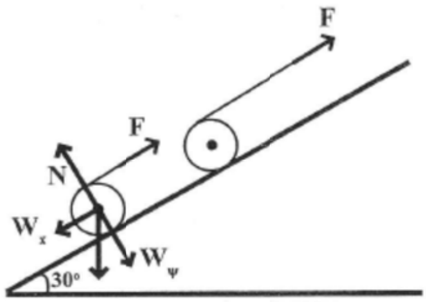
γ) Εφαρμόζω Α.Δ.Μ.Ε. για τη σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου για την μετατόπιση $h_1 = 4{,}8m$ και παίρνω: $m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$ επίσης $\upsilon_{cm} = \omega\cdot R$ και τελικά $\omega = 40rad/s$.

Επομένως $L = I\cdot\omega$ δηλαδή $L = 1{,}6kgm^2/s$.

δ) $\eta\mu\varphi = \frac{h_2}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta x = \frac{2{,}4\pi}{0{,}6} = 4\pi m$ όμως $\Delta x = \Delta\theta\cdot R \Leftrightarrow \Delta\theta = 20\pi$ rad οπότε $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$

δηλαδή N = 10 περιστροφές .

Δ13)



α) υ = σταθ $\Rightarrow \Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F + T_\sigma - W_x = 0$ (1)

$\Sigma\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \tau_F - \tau_{T\sigma} = 0 \Rightarrow FR = T_\sigma R \Rightarrow F = T_\sigma$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow 2F - W_x = 0 \Rightarrow F = \frac{W_x}{2} = \frac{W\eta\mu30^0}{2} \Rightarrow F = \frac{400}{4} \Rightarrow F = 100N$

β) $2^{ος}$ N.N. (για την μεταφορική κίνηση):

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F + T - W_x = ma \Rightarrow T = W_x - F + ma$ (3)

$2^{ος}$ N.N. (για την περιστροφική κίνηση):

$\Sigma\vec{\tau} = I a_\gamma \Rightarrow \tau_F - \tau_T = I a_\gamma \Rightarrow FR - TR = I a_\gamma \Rightarrow F\cancel{R} - T\cancel{R} = \frac{1}{2}mR^2 a_\gamma \Rightarrow$

$F - T = \frac{1}{2}mRa_\gamma \overset{a=a_\gamma R}{\Rightarrow} F - T = \frac{1}{2}ma \overset{(3)}{\Rightarrow} F - (W_x - F + ma) = \frac{1}{2}ma \Rightarrow$

$2F - W_x = ma + \frac{1}{2}ma \Rightarrow a = \frac{2F - W_x}{\frac{3}{2}m} \Rightarrow a = 1m/s^2$

γ) $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{h}{\eta\mu30} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4h}{a} \Rightarrow t^2 = \frac{4\cdot1}{1} \Rightarrow t = 2sec$

$\upsilon_{cm} = at \Rightarrow \upsilon_{cm} = 2\cdot1 \Rightarrow \upsilon_{cm} = 2m/s$

$\upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{2}{0{,}2} \Rightarrow \omega = 10rad/s$

$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{1}{2}mR^2\omega \Rightarrow L = 8Kgm^2/s$

δ) Η επιτάχυνση του σχοινιού είναι:

$a' = a_{cm} + a_\gamma \Rightarrow a' = a_\gamma R + a_\gamma R \Rightarrow a' = 2a_{cm} \Rightarrow a' = 2\cdot1 \Rightarrow a' = 2m/s^2$

$\Delta x' = \frac{1}{2}a't^2 \Rightarrow \Delta x' = \frac{1}{2}2\cdot2^2 \Rightarrow \Delta x' = 4m$

$W_F = F\,\Delta x' \Rightarrow W_F = 130\cdot4 = 520J$

$\Delta E = E' - E = K' + U' - (K + U) \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + m\cdot g\cdot h \Rightarrow$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mu_{cm}{}^2 + m\cdot g\cdot h \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{4}mu_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}mu_{cm}{}^2 + m\cdot g\cdot h \Rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{3}{4}mu_{cm}{}^2 + m\cdot g\cdot h \Rightarrow \Delta E = 520J$$

Δ14)

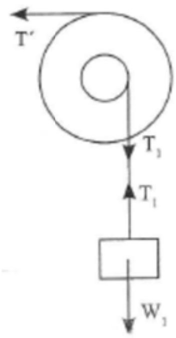
α) $1^{ος}$ Ν.Ν. (για την ισορροπία του σώματος):

$\Sigma F_\psi = 0 \Rightarrow T - mg = 0 \Rightarrow T = 200N$

$1^{ος}$ Ν.Ν. (για την ισορροπία του στερεού):

$\Sigma \tau_{(o)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_F - \vec{\tau}_T = 0 \Rightarrow -\tau_F + \tau_T = 0 \Rightarrow$

$-F2\cancel{R} + T\cancel{R} = 0 \Rightarrow F = \frac{T}{2} \Rightarrow F = 100N$



β) $2^{ος}$ Ν.Ν. (για το σώμα που κάνει μεταφορική κίνηση):

$\Sigma F = ma \Rightarrow T' - mg = ma \quad (1)$

$2^{ος}$ Ν.Ν. (για το σώμα που κάνει περιστροφική κίνηση):

$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow \vec{\tau}_F - \vec{\tau}_T = I\alpha_\gamma \Rightarrow F2R - T' - R = MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow 2F - T' = MR\alpha_\gamma \quad (2)$

Αφού το σχοινί δε γλιστράει πάνω στην τροχαλία, η επιτάχυνση του σώματος m είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας. Άρα:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R \Rightarrow \alpha = \alpha_\gamma R \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} 2F - T' = M\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} 2F - (mg + m\alpha) = M\alpha \Rightarrow 2F - mg - m\alpha = M\alpha \Rightarrow$$

$$F - mg = M\alpha + m\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2F - mg}{M + m} \Rightarrow \alpha = \frac{2\cdot 115 - 20\cdot 10}{10 + 20} \Rightarrow \alpha = 1m/s^2$$

γ) $h = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{\alpha} = \frac{2\cdot 2}{1} \Rightarrow t = 2sec$

$\omega = \alpha_\gamma t \overset{(3)}{\Rightarrow} \omega = \frac{\alpha}{R}t = \frac{1}{0,2}2 \Rightarrow \omega = 10rad/s$

$L = I\omega \Rightarrow L = MR^2\omega = 10\cdot 0,2^2\cdot 10 \Rightarrow L = 4kgm^2/s$

δ) Οι δυο κύλινδροι περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή επιτάχυνση.

Για το σώμα Σ: $\alpha = \alpha_\gamma R \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\alpha}{R} = \frac{1}{0,2} \Rightarrow \alpha_\gamma = 5rad/s^2$

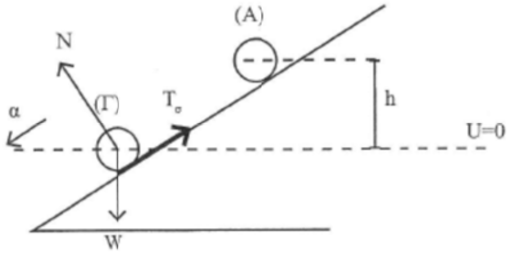
Για το σημείο Α: $\alpha' = \alpha_\gamma 2R \Rightarrow \alpha' = 5\cdot 2\cdot 0,2 \Rightarrow \alpha' = 2m/s^2$

$x = \frac{1}{2}\alpha' t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}2\cdot 2^2 \Rightarrow x = 4m$

ε) $\Pi = \frac{K}{W_F}100\% = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{F_x}100\% = \frac{\frac{1}{2}MR^2\omega^2}{F_x} \Rightarrow \Pi = \frac{\frac{1}{2}10\cdot 0,2^2\cdot 10^2}{115\cdot 4}100\% = \frac{20}{460}100\% \Rightarrow$

$\Pi = \frac{100}{23}\%$

Δ15)



α) $\upsilon_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{cm}}{R} \Rightarrow \omega = \frac{8}{0,2} \Rightarrow \omega = 40rad/s$

β) $L = I\omega \Rightarrow L = \frac{1}{2}MR^2\omega \Rightarrow L = 4kgm^2/s$

γ) Α.Δ.Μ.Ε. (για την κίνηση του κυλίνδρου):

$$K + U = K' + U' \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \xRightarrow{\upsilon_{cm}=\omega R}$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{4}m\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow \cancel{m}\,gh = \frac{3}{4}\cancel{m}\,\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow h = \frac{3\upsilon_{cm}^2}{4g} \Rightarrow h = \frac{3\cdot 8^2}{4\cdot 10} \Rightarrow$$

$h = 4,8cm$

δ) $$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}m\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{\cancel{2}}I\omega^2} = \frac{\cancel{m}\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}\cancel{m}R^2\omega^2} = \frac{2\upsilon_{cm}^2}{R^2\omega^2} \xRightarrow{\upsilon_{cm}=\omega R} \frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = 2$$

Δ16)

1. Επειδή το σώμα εκτελεί κύλιση με σταθερή επιτάχυνση έχουμε:

$$x = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow a_{cm} = \frac{2x}{t^2} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2\cdot 2}{1^2} \Rightarrow a_{cm} = 4m/s^2$$

2ος Ν.Ν. (για τη μεταφορική κίνηση):

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow W_x - T_\sigma = ma_{cm} \quad (1)$$

2ος Ν.Ν. (για την περιστροφική κίνηση):

$$\Sigma\vec{\tau} = I_{cm}\vec{a}_\gamma \Rightarrow T_\sigma r = I_{cm}a_\gamma \xRightarrow{a_\gamma=\frac{a_{cm}}{r}} T_\sigma r = I_{cm}\frac{a_{cm}}{r} \Rightarrow T_\sigma = I_{cm}\frac{a_{cm}}{r^2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$W_x - I_{cm}\frac{a_{cm}}{r^2} = ma_{cm} \Rightarrow I_{cm}\frac{a_{cm}}{r^2} = W_x - ma_{cm} \Rightarrow I_{cm} = \frac{W_x - ma_{cm}}{\frac{a_{cm}}{r^2}} \Rightarrow$$

$$I_{cm} = \frac{10-24}{\frac{4}{1^2}} \Rightarrow I_{cm} = 0,5kgm^2$$

2. Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$W_x - I_{cm}\frac{a_{cm}}{R^2} = Ma_{cm} \Rightarrow W_x = a_{cm}\frac{I_{cm}}{R^2} + Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{W_x}{\frac{I_{cm}}{R^2} + M} \xRightarrow{W_x = Mg\eta\mu\varphi}$$

$$\alpha_{cm} = \frac{Mg\eta\mu\varphi}{\frac{I_{cm}}{R^2}+M} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{cm(1)} = \dfrac{Mg\eta\mu\varphi}{\frac{MR^2}{R^2}+M} \\ \alpha_{cm(2)} = \dfrac{Mg\eta\mu\varphi}{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{R^2}+M} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_{cm(1)} &= \frac{Mg\eta\mu\varphi}{M+M} \\ \alpha_{cm(2)} &= \frac{Mg\eta\mu\varphi}{\frac{M}{2}+M} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha_{cm(1)}}{\alpha_{cm(2)}} = \frac{\frac{1}{2}g\eta\mu\varphi}{\frac{2}{3}g\eta\mu\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_{cm(1)}}{\alpha_{cm(2)}} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \alpha_{cm(1)} < \alpha_{cm(2)}$$

Άρα ο δίσκος κινείται με τη μεγαλύτερη επιτάχυνση.

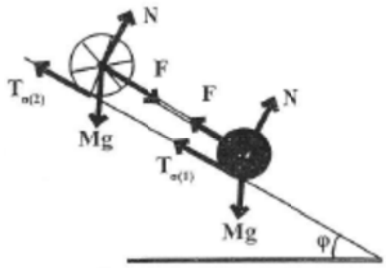
3.

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_2^2} \overset{\omega=\frac{\upsilon}{R}}{\Rightarrow} \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I_1\frac{\upsilon_1^2}{R}}{\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_2^2} \underset{I_2=MR^2}{\overset{I_1=\frac{1}{2}MR^2}{\Rightarrow}}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_1^2}{R^2}}{\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_2^2}{R^2}} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{3}{4}M\upsilon_1^2}{M\upsilon_2^2} \overset{\upsilon_1=\upsilon_2}{\Rightarrow} \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{4}$$

4. $2^{ος}$ N.N. (για την περιστροφική κίνηση):

i) του δίσκου



$$\Sigma\vec{\tau} = I_{cm}\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow T_{\sigma(1)}R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \overset{\alpha_\gamma=\frac{\alpha_{cm}}{r}}{\Rightarrow}$$

$$T_{\sigma(1)}R = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{\sigma(1)} = \frac{1}{2}M\alpha_{cm} \quad (3)$$

ii) του δακτυλίου

$$\Sigma\vec{\tau} = I_{cm}\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow T_{\sigma(2)}R = MR^2\alpha_\gamma \overset{\alpha_\gamma=\frac{\alpha_{cm}}{r}}{\Rightarrow} T_{\sigma(2)}R = MR^2\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow T_{\sigma(2)} = M\alpha_{cm} \quad (4)$$

$2^{ος}$ N.N. (για την μεταφορική κίνηση):

i) του δίσκου

$$\Sigma\vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - F - T_{\sigma(1)} = M\alpha_{cm} \quad (5)$$

ii) του δακτυλίου

$$\Sigma\vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi + F - T_{\sigma(2)} = M\alpha_{cm} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (3), (5) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - F - \frac{1}{2}M\alpha_{cm} = M\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{3}{2}M\alpha_{cm} = Mg\eta\mu\varphi - F \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \frac{Mg\eta\mu\varphi - F}{\frac{3}{2}M} \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (4), (6) έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi + F - M\alpha_{cm} = M\alpha_{cm} \Rightarrow 2M\alpha_{cm} = Mg\eta\mu\varphi + F \Rightarrow$$

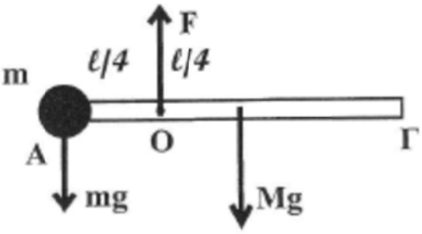
$$a_{cm} = \frac{Mg\eta\mu\varphi + F}{2M} \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) έχουμε:

$$\frac{Mg\eta\mu\varphi - F}{\frac{3}{2}\cancel{M}} = \frac{Mg\eta\mu\varphi + F}{2\cancel{M}} \Rightarrow 3(Mg\eta\mu\varphi + F) = 4(Mg\eta\mu\varphi - F) \Rightarrow 7F = Mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$F = \frac{Mg\eta\mu\varphi}{7} \Rightarrow F = 1N$$

Δ17)



1. $1^{ος}$ N.N. (για την περιστροφική κίνηση):

$$\Sigma\vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_{Mg} = 0 \Rightarrow -mg\frac{\ell}{4} + Mg\frac{\ell}{4} = 0 \Rightarrow m = M$$

$1^{ος}$ N.N. (για την μεταφορική κίνηση):

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - mg - Mg = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} F - 2mg = 0 \Rightarrow m = \frac{F}{2g} \Rightarrow m = \frac{20}{2\cdot 10} \Rightarrow m = M = 1kg$$

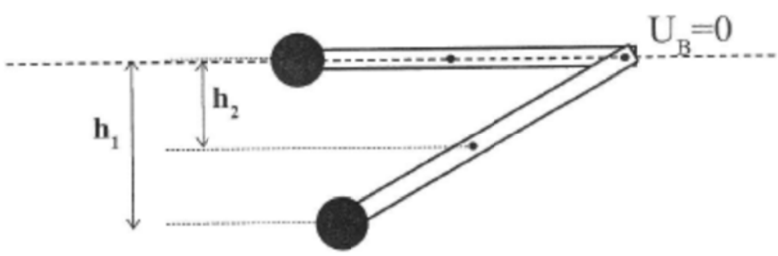
2. $$I = I_p + I_m \Rightarrow I = (I_{cm} + M\frac{\ell^2}{4}) + I_m \Rightarrow I = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4} + m\ell^2 \Rightarrow I = (\frac{M}{3} + m)\ell^2$$

$$\Sigma\vec{\tau}_{(\Gamma)} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_{Mg} = I\vec{a}_\gamma \Rightarrow 0 + Mg\frac{\ell}{2} + mg\ell = (\frac{M}{3} + m)\ell^2 a_\gamma \Rightarrow$$

$$(\frac{M}{2} + m)g\cancel{\ell} = (\frac{M}{3} + m)\ell^{\cancel{2}} a_\gamma \Rightarrow \ell = \frac{(\frac{M}{2} + m)g}{(\frac{M}{3} + m)a_\gamma} \Rightarrow \ell = \frac{(\frac{1}{2} + 1)10}{(\frac{1}{3} + 1)3,75} \Rightarrow \ell = 3m$$

3. $$\frac{K}{K_{ολ}} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}I_{(\Gamma)}\omega^2} = \frac{m\upsilon^2}{(\frac{M}{3} + m)\ell^2\omega^2} \overset{\upsilon=\omega\ell}{=} \frac{m\omega^2\ell^2}{(\frac{M}{3} + m)\ell^2\omega^2} \Rightarrow \frac{K}{K_{ολ}} = \frac{m}{(\frac{M}{3} + m)} = \frac{1}{(\frac{1}{3} + 1)} \Rightarrow \frac{K}{K_{ολ}} = \frac{3}{4}$$

4.



Α.Δ.Μ.Ε. (για την περιστροφική κίνηση του συστήματος):

$$\cancel{K} + \cancel{U_B} = K' + U_B' \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}I_{(\Gamma)}\omega^2 - mgh_1 - Mgh_2 \Rightarrow$$

$$mgh_1 + Mgh_2 = \frac{1}{2}I_{(\Gamma)}\omega^2 \Rightarrow mgh_1 + Mgh_2 = \frac{1}{2}(\frac{M}{3}+m)\ell^2\omega^2 \Rightarrow$$

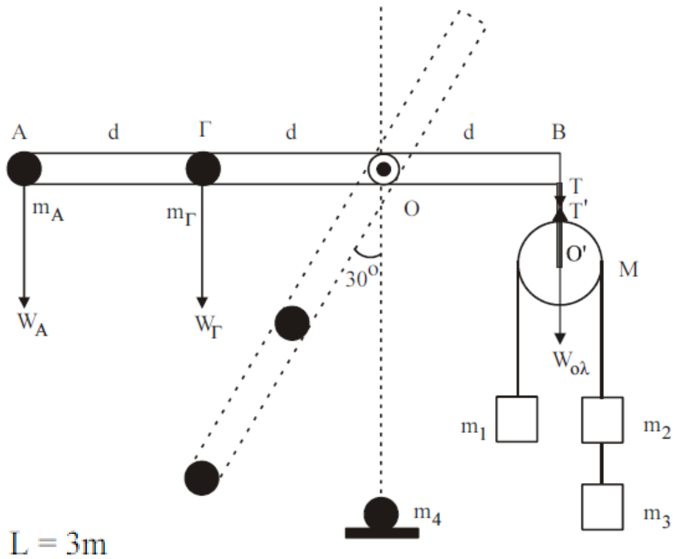
$$mg\ell\eta\mu\varphi + Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}(\frac{M}{3}+m)\ell^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{mg\ell\eta\mu\varphi + Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi}{\frac{1}{2}(\frac{M}{3}+m)\ell^2} = \frac{9+4,5}{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+1)9} \Rightarrow \omega^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \omega = \frac{3}{2}\,rad/s$$

$$L = I\omega \Rightarrow L = (\frac{M}{3}+m)\ell^2\omega = (\frac{1}{3}+1)3^2\frac{3}{2} \Rightarrow L = 18kgm^2/s$$

Δ18)

Δ1. Στο σημείο Β ασκείται δύναμη τάσης Τ ίση με το συνολικό βάρος του συστήματος τροχαλίας – m_1, m_2, m_3 αφού το σύστημα ισορροπεί.



$L = 3d \Rightarrow L = 3m$

$m_A = 1\,Kg$ $\quad m_1 = 2\,Kg$

$m_\Gamma = 6\,Kg$ $\quad m_2 = m_3 = 1\,Kg$

$M = 4\,Kg$

Στην οριζόντια θέση ισχύει:

$$\Sigma_\tau = \tau_{w_A} + \tau_{w_{A\Gamma}} - \tau_{(w_{ολ})} \Rightarrow$$

$$\Sigma_\tau = m_A \cdot g \cdot 2d + m_\Gamma \cdot g \cdot d - (M + m_1 + 2m_2)\cdot g \cdot d$$

$$\Sigma_\tau = 10\cdot 2 + 60\cdot 1 - 80\cdot 1$$

$$\Sigma_\tau = 80 - 80 \Rightarrow \Sigma_\tau = 0$$

Άρα η ράβδος δεν περιστρέφεται και ισορροπεί.

Δ2. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\Sigma_\tau = I_{Ολ.}\alpha_{γων.} \Rightarrow \tau_{W_A} + \tau_{W_\Gamma} = I_{Ολ.}\alpha_{γων.} \Rightarrow m_A g \cdot ημ30 \cdot 2d + m_\Gamma g \cdot ημ30 \cdot d =$$

$$= \left[m_A \cdot (2d)^2 + m_\Gamma \cdot d^2\right]\alpha_{γων.} \Rightarrow 1\cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\cdot 2 + 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\cdot 1 = [1\cdot 4 + 6\cdot 1]\alpha_{γων.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + 30 = 10\cdot\alpha_{γων.} \Rightarrow 40 = 10\cdot\alpha_{γων.} \Rightarrow \alpha_{γων.} = 4\ rad/sec^2 .$$

Αρχικά εφαρμόζω Α.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα ράβδου -m_A– $m_Γ$ ανάμεσα στην οριζόντια θέση και στην κατακόρυφη:

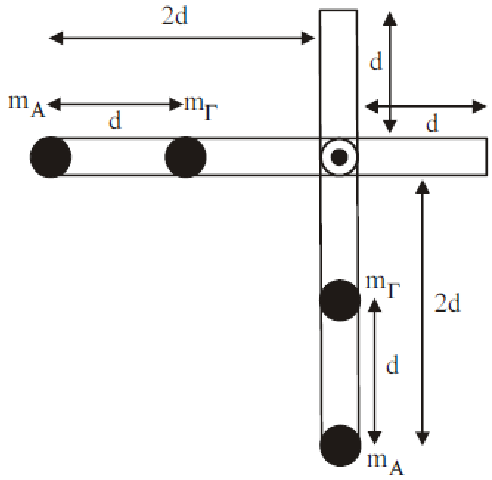
$$K_{αρχ.} + U_{Ολ_{αρχ.}} = K_{τελ.} + U_{Ολ.τελ.} \Rightarrow m_A \cdot g \cdot 2d + m_Γ \cdot g \cdot 2d = \frac{1}{2} I_{ολ.} \cdot \omega^2 + m_Γ \cdot g \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 10 \cdot 2 + 6 \cdot 10 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \omega^2 + 6 \cdot 10 \cdot 1 \Rightarrow 20 + 60 = 5 \cdot \omega^2 \Rightarrow 80 = 5 \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 16 \Rightarrow \omega = 4 \text{ rad/ sec}.$$

Σημείωση: Επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας παίρνουμε την κατώτερη θέση του m_A (κατακόρυφη).

Δ3.



Στη συνέχεια εφαρμόζουμε Αρχή διατήρησης στροφορμής για το σύστημα ράβδου – m_A – $m_Γ$ – m_4

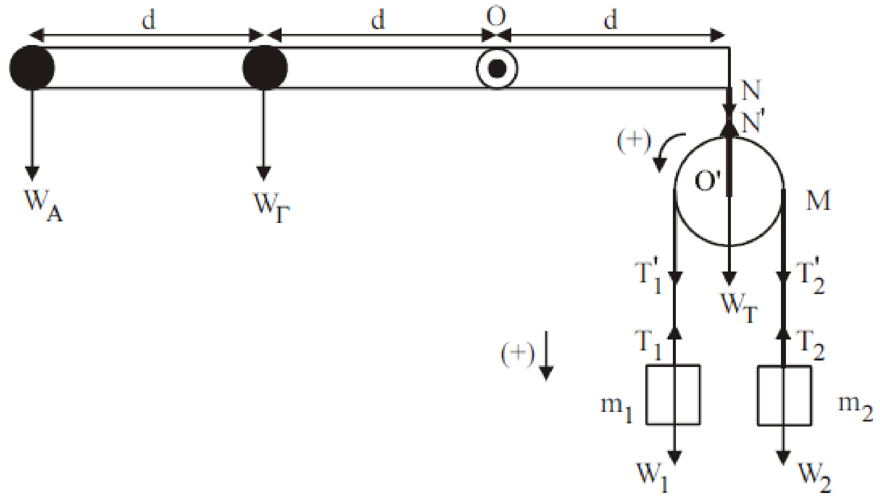
$$L_{ολ_{αρχ}} = L_{ολ_{τελ}} \Rightarrow I_{ολ} \cdot \omega = I'_{ολ} \cdot \omega' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{ολ} \cdot \omega = \left[I_{ολ} + m_4 (2d)^2 \right] \omega' \Rightarrow$$

$$10 \cdot 4 = [10 + 5 \cdot 4]\omega' \Rightarrow 40 = 30\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{4}{3} \text{ rad/sec}$$

Άρα $U_A = \omega' \cdot (2d) \Rightarrow U_A = \frac{4}{3} \cdot 2 \Rightarrow U_A = \frac{8}{3}$ m/sec.

Δ4.



$m_1: \ \Sigma F = m_1\alpha_{cm} \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1\alpha_{cm} \Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1\alpha_{cm}$ (1).

$m_2: \ \Sigma F = m_2\alpha_{cm} \Rightarrow T_2 - m_2 g = m_2\alpha_{cm} \Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2\alpha_{cm}$ (2)

Τροχαλία:

$\Sigma\tau_{(O)} = I_{\tau\rho o\chi.} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T'_1 \cdot R - T'_2 \cdot R = \frac{1}{2}M \cdot R^2 \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow (T_1 = T'_1, T_2 = T'_2$ αβαρή σχοινιά)

$\Rightarrow T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = \frac{1}{2}M \cdot R \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2}M \cdot \alpha_{cm}$ (3) $\Rightarrow$

Αντικαθιστώντας (1) και (2) στην (3) $\Rightarrow$

$$m_1 \cdot g - m_1 \cdot \alpha_{cm} - m_2 \cdot g - m_2 \cdot \alpha_{cm} = \frac{1}{2}M \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2)g = \left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right)\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{(m_1 - m_2)g}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{(2-1)10}{\frac{1}{2}4 + 2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{5} \Rightarrow \alpha_{cm} = 2 \text{ m/sec}^2.$$

άρα η (1) $\Rightarrow T_1 = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 2 \Rightarrow T_1 = 16$ N.

και η (2) $\Rightarrow T_2 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \Leftrightarrow T_2 = 12$ N.

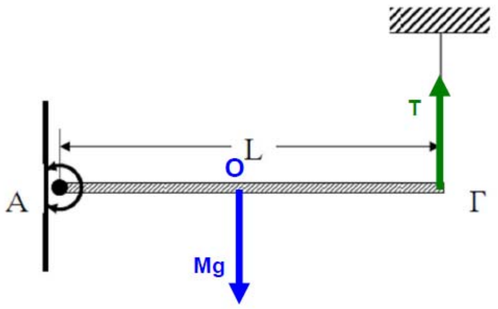
Επειδή η τροχαλία ακίνητη μεταφορικά έχω:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$$
$$N' - T_1' - T_2' - W_T = 0 \Leftrightarrow$$
$$N' = T_1 + T_2 + W_T \Leftrightarrow$$
$$N' = 16 + 12 + 4 \cdot 10 \Leftrightarrow$$
$$N' = 68\text{ N} \quad \text{όμως } N = N' = 68\text{ N.}$$

Για να ισορροπεί το σύστημα ράβδος $- m_A - m_\Gamma$ πρέπει:

$$\Sigma\tau_{(0)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\tau_w + \tau_{w_\Gamma} - \tau_N = 0 \Leftrightarrow$$
$$m \cdot g \cdot 2d + m_\Gamma \cdot g \cdot d - N \cdot d = 0 \Leftrightarrow$$
$$m \cdot 10 \cdot 2 + 6 \cdot 10 \cdot 1 - 68 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$m = \frac{8}{20} \Leftrightarrow m = 0{,}4\text{ Kg.}$$

Δ19)



Δ1. $\sum\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T \cdot (A\Gamma) - Mg \cdot (OA) = 0 \Rightarrow$

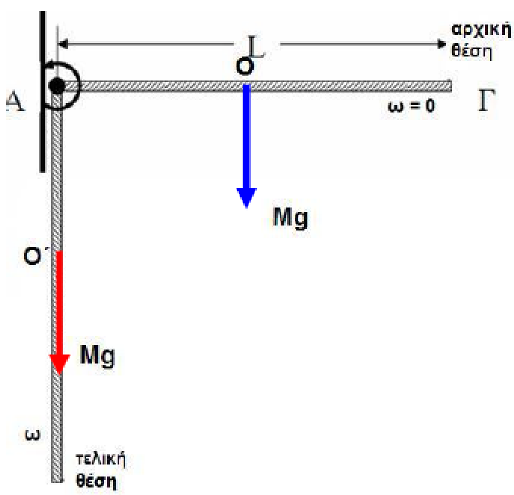
$$T \cdot 2(OA) = Mg \cdot (OA) \Rightarrow T = \frac{Mg}{2} = 15\text{ N}$$

Δ2. $I_A = I_{cm} + M\frac{L^2}{4} = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3} = 1\text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

$$\sum\tau_{(A)} = I_A \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\sum\tau_{(A)}}{I_A} = \frac{Mg\frac{L}{2}}{I_A} = 15\text{ rad/s}^2$$

Δ3. Θεώρημα έργου - ενέργειας

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{βάρους}$$
$$\frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \omega^2 - 0 = Mg\frac{L}{2} \Rightarrow$$
$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_A}} = \sqrt{30}\text{ rad/s}$$



Δ4. $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \sum\tau_{(A)} = 0$

Δ20)

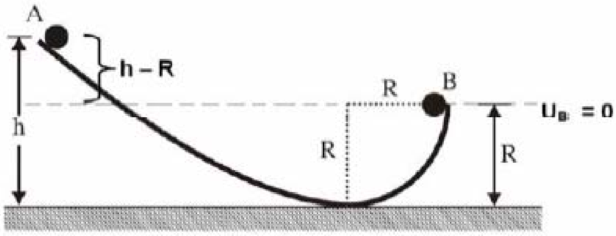
Δ.1 Απο το Θεώρημα Steiner προκύπτει:

$I_B = I_{cm} + mr^2 = 0{,}56 \cdot 10^{-3}\ kgm^2$

Δ.2

Εφαρμόζοντας Α.Δ.Μ.Ε. (Α —» Β) παίρνουμε:

$E_{μηχ(Α)} = E_{μηχ(Β)}$



$U_A + K_A = U_B + K_B$ όμως $K_A = 0$ και $U_B = 0$

$U_A = K_B$

$$mg(h-R) = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$mg(h-R) = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2$$

Όμως ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε $\omega r = \upsilon_{cm}$

$$mg(h-R) = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{5}m\upsilon_{cm}^2$$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}g(h-R)}$$

$\upsilon_{cm} = 10\ m/s$

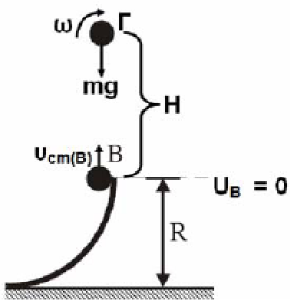
Δ.3

$$\omega = \frac{\upsilon_{cm}}{r} = 500 rad/s$$

$$I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{8}{5}\cdot 10^{-4}\ kg\cdot m^2$$

$$L = I_{cm}\cdot\omega = 0{,}08\ kg\cdot\frac{m^2}{s}$$

Δ.4 Το σώμα αφήνοντας τον οδηγό εκτελεί σύνθετη κίνηση, μεταφορική και ταυτόχρονα περιστροφική, κατα τη διαδρομή Β^Γ η μοναδική δύναμη που δρα στο σώμα είναι το βάρος της σφαίρας, το οποίο διέρχεται από το κέντρο του άξονα περιστροφής της και επομένως δεν ασκεί ροπή στρέψης.



Δηλ. $\Sigma\tau = 0$, αυτό σημαίνει πως η γωνιακή ταχύτητα ω που έχει αποκτήσει στη θέση Β θα παραμείνει σταθερή (ω = 500 rad/s) καθόλη τη διαδρομή του Β→Γ. Η μεταφορική της κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη, άρα στο σημείο Γ δεν έχει κιvητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης ($\upsilon_{cm}(Γ) = 0$) έχει όμως κινητική ενέργεια από περιστροφή ($\omega_Γ = 500$ rad/s).

Εφαρμόζοντας Α.Δ.Μ.Ε. (Β —» Γ) παίρνουμε: ΕΜΗΧ(Β) ΕΜΗΧ(Γ)

$U_B + K_B = U_Γ + K_Γ$, όμως $U_B = 0$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2} = mgH + \cancel{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}$$

$$H = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2g} = 5m$$

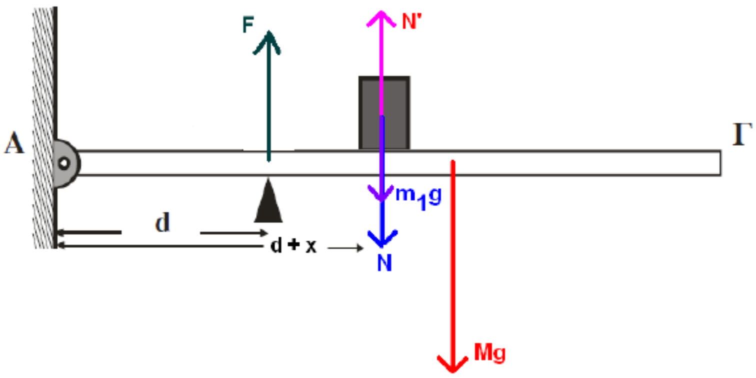
ΜΑΘΗΣΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Δ21)

Δ1. Ισχύει $W_F = E_{ολ} \Rightarrow F \cdot \Delta x = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow$

$A = \sqrt{\frac{2F \cdot \Delta x}{k}} \Rightarrow \mathbf{A = 0,2\,m}$

Δ2.



Για το σώμα $\sum F_y = 0 \Rightarrow N' = m_1 g \overset{N=N'}{\Rightarrow} N = m_1 g$

Πρέπει $\sum \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot d = m_1 g(d + x) + Mg\frac{L}{2} \Rightarrow$

$F = 10(1 + x) + 6 \Leftrightarrow F = 16 + 10x$

Για τη ράβδο

$\sum F = 0 \Rightarrow F_A + F = Mg + m_1 g \Leftrightarrow F_A = Mg + m_1 g - F \Rightarrow$

$F_A = -2 - 10x$

- Για $x = -0,2m$ βρίσκουμε $F_A = 0\ N$
- Για $x = +0,2m$ βρίσκουμε $F_A = -4\ N$
- Για $x = 0m$ βρίσκουμε $F_A = -2\ N$

Η δύναμη F_A έχει φορά προς τα κάτω

Δ3. Μετά την κρούση

$K + U = E_{ολ}$

$\frac{1}{2} \cdot K \cdot x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_1'^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot A'^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{K \cdot x_1^2 + m \cdot \upsilon_1'^2}{K}}$

Αφού $A' = A'_{max}$, πρέπει $x_1 = 0,2m$

Δ4. $A' = 0,4m$

$\upsilon_1' = \upsilon_2 = -2\sqrt{3}$ m/s

$\upsilon_2' = \upsilon_1 = 0$ m/s

Όταν $t = 0$, τότε $x = +0,2m$ και $\upsilon = -2\sqrt{3}$ m/s

άρα $ημφ_0 = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$, οπότε $φ_0 = \frac{5π}{6}$ rad

$συνφ_0 = \frac{\upsilon}{\upsilon_{max}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

εξίσωση $x = 0,4ημ\left(10t + \frac{5π}{6}\right)$

Η κρούση γίνεται στη θέση $x = +0,2m$ με $υ > 0$

άρα $ημ\left(10t + \frac{5π}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

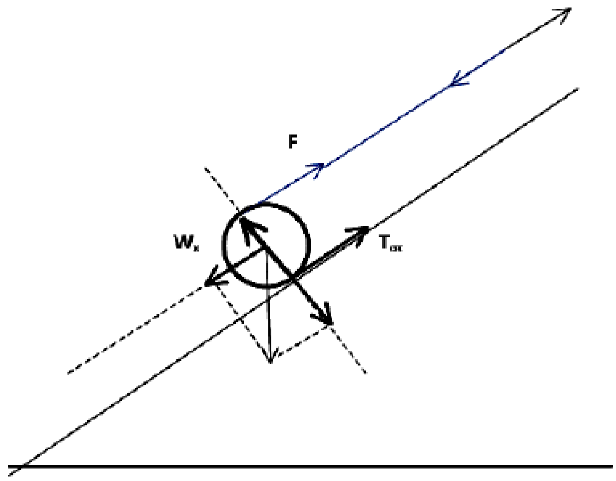
$10t + \frac{5π}{6} = 2κπ + \frac{π}{6}$ ή $10t + \frac{5π}{6} = 2κπ + π - \frac{π}{6} \Leftrightarrow$

$10t = 2κπ - \frac{2π}{3}$ ή $10t = 2κπ$ $\boxed{με\ 10t \in (0\ ,\ 2π)}$

- Για $κ = 0$ έχουμε $10t = -\frac{2π}{3}$ ή $10t = 0$ (απορρίπτονται)
- Για $κ = 1$ έχουμε $10t = \frac{4π}{3}$ ή $10t = 2π$ (απορ.) $\Leftrightarrow$

$$t = \frac{2π}{15} \text{ sec}$$

Δ22)



Δ1) Επειδή ο δίσκος δεν περιστρέφεται ισχύει:

$$ΣΤ = 0 \Rightarrow FR - T_{στ}R = 0 \Rightarrow F = T_{στ} \quad (1)$$

Λόγω της ισορροπίας στη μεταφορική κίνηση ισχύει:

$$ΣFx = 0 \Rightarrow F + T_{στ} = Wx \quad (2)$$

Από (1) & (2) $W_x = 2T_{στ}$ $mgημ30^\circ = 2T_{στ}$ άρα $T_{στ} = 10N$

Δ2) Από τη μεταφορική κίνηση : $ΣFx = ma_{cm} \Rightarrow Wx - T_{στ} - F = ma_{cm}$ (1)

Από την περιστροφική κίνηση : $Στ = Iα_{γων} \Rightarrow T_{στ}R - FR = \frac{1}{2}mR^2\frac{a_{cm}}{R}$ (2)

(1)+(2) $Wx - 2F = \frac{3}{2}ma_{cm} \Rightarrow mgημφ - 2F = \frac{3}{2}ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = 1m/s$

Και τελικά η (1) δίνει : Τστ=9Ν

Δ3) Ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση (μεταφορική + περιστροφική), το ανώτερο λοιπόν σημείο του δίσκου (σημείο εφαρμογής της δύναμης) έχει ταχύτητα

$u = \upsilon_{μετ} + \upsilon_{περ} = ω_1 R + ω_1 R = 2ω_1 R = 2m/s$

Δ4) Το κέντρο μάζας του δίσκου εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_{cm} = a_{cm} \bullet t$

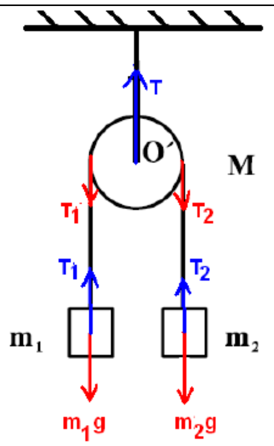
διαιρώντας μ ε R προκύπτει $\frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{a_{cm} \bullet t}{R} \Rightarrow \omega = \alpha_{γων} \bullet t$

για τη χρονική στιγμή t1 είναι: $ω_1 = 10 r/s$ έτσι

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} \bullet t \Rightarrow \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{a_{cm} \bullet t}{R} \Rightarrow \omega = \alpha_{\gamma} \bullet t \Rightarrow t = 1s$$

Το διάστημα κίνησης του κέντρου μάζας είναι $s = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t_1^2 = 0,5m$

Δ23)



Δ1. Εφαρμόζουμε θεμελιώδη νόμο

Για το σώμα m_1

$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot α_{cm}$ (1)

Για το σώμα m_2

$T_2 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot α_{cm}$ (2)

Για την τροχαλία

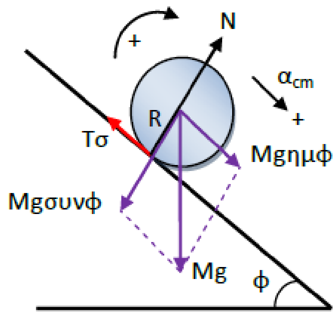
$T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot α_γ \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot α_{cm}$ (3)

Από το σύστημα των (1), (2) και (3) προκύπτει :

$$α_{cm} = \frac{m_1 \cdot g - m_2 \cdot g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 2 \, m/s^2$$

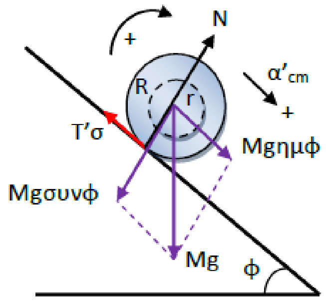
Δ2. Από τη σχέση (1) βρίσκουμε $T_1 = 16N$

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε $T_2 = 12N$

	Δ3. $\alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{2}{0,5} = 4\ rad/s^2$ $\omega = \alpha_\gamma \cdot t = 4 \cdot 2 = 8\ rad/s$ **Δ4.** $h = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{3}\ s$ Η ταχύτητα των σωμάτων είναι $\upsilon = \alpha_{cm} \cdot t = 2\sqrt{3}\ m/s$ Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι $\omega = \alpha_\gamma \cdot t = 4\sqrt{3}\ rad/s$ Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $K = K_1 + K_2 + K_{τροχ} = \frac{1}{2}m_1 \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2}I \cdot \omega^2 = \mathbf{30\ J}$
Δ24)	**Δ1.** Η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω, ώστε με τη ροπή της - η μοναδική ροπή στον κύλινδρο - να τον επιταχύνει στροφικά. Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T_\sigma = M\alpha_{cm}$ (1)  Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει: $\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma R = \frac{1}{2}MR^2 a_{\gamma\omega\nu}$ $\xrightarrow[\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R]{ΚΧΟ} T_\sigma = \frac{1}{2}Ma_{cm}$ (2) $(1)+(2) \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2}Ma_{cm} \Rightarrow$ $g\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3}g\eta\varphi$ **Δ2.** Ο κύλινδρος που αφαιρέθηκε έχει την ίδια πυκνότητα ρ με τον αρχικό, μάζα m και όγκο V_r, άρα: $\rho = \frac{M}{V_R} = \frac{m}{V_r} \Rightarrow m = M\frac{V_r}{V_R} = M\frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 h} \Rightarrow m = M\frac{r^2}{R^2}$ (3) Η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου που απομένει θα δίνεται από τη σχέση: $I_{κοιλ(cm)} = I_{R(cm)} - I_{r(cm)} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 \xRightarrow{(3)} I_{κοιλ(cm)} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}M\frac{r^2}{R^2}r^2 \Rightarrow$ $I_{κοιλ(cm)} = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$ (4)

Δ3. Αφού δεν υπάρχουν τριβές, το **εσωτερικό** κυλινδρικό τμήμα που αφαιρέσαμε και προσθέσαμε θα κάνει μόνο **μεταφορική κίνηση**, ενώ το **εξωτερικό σύνθετη** κίνηση άρα:

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:



$$\Sigma \vec{F}_x = M\vec{\alpha}'_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - \mathrm{T}'_\sigma = M\alpha'_{cm} \quad (5)$$

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma\tau_{cm} = \mathrm{I}_{\kappa o\iota\lambda,cm}\alpha'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \mathrm{T}'_\sigma R = \frac{1}{2}MR^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\alpha'_{\gamma\omega\nu}$$

$$\underset{\alpha'_{cm}=\alpha'_{\gamma\omega\nu}R}{\overset{\kappa\chi o}{\Rightarrow}} \mathrm{T}'_\sigma = \frac{1}{2}M\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\alpha'_{cm} \quad (6)$$

$$(5)+(6) \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi = M\alpha'_{cm} + \frac{1}{2}M\alpha'_{cm}\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right) \Rightarrow$$

$$g\eta\mu\varphi = \left(1+\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2R^4}\right)\alpha'_{cm} \Rightarrow g\eta\mu\varphi = \left(\frac{3}{2}-\frac{r^4}{2R^4}\right)\alpha'_{cm} \Rightarrow$$

$$\alpha'_{cm} = \frac{2g\eta\mu\varphi}{3-\dfrac{r^4}{R^4}} \quad (7)$$

Δ4.

$$\frac{\mathrm{K}_{\mu\varepsilon\tau(\mathrm{M})}}{\mathrm{K}_{\sigma\tau\rho(\kappa o\iota\lambda)}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}I_{\kappa o\iota\lambda,cm}\omega^2} \underset{\upsilon_{cm}=\omega R}{\overset{\kappa\chi o}{=}} \frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}\omega^2R^2}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(1-\frac{r^4}{R^4}\right)\omega^2} = \frac{2R^4}{R^4-r^4}$$

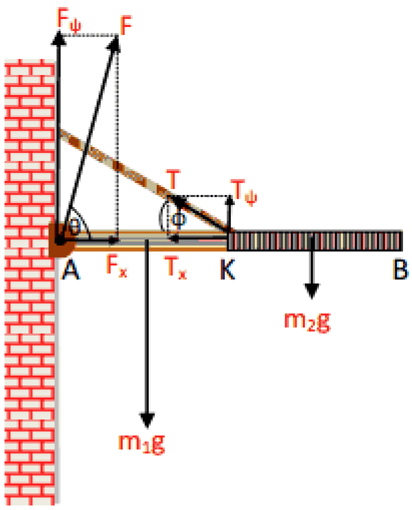
Θέτοντας στην παραπάνω σχέση r = R/2 έχουμε:

$$\frac{\mathrm{K}_{\mu\varepsilon\tau(\mathrm{M})}}{\mathrm{K}_{\sigma\tau\rho(\kappa o\iota\lambda)}} = \frac{2R^4}{R^4-\dfrac{R^4}{2^4}} = \frac{2R^4}{\dfrac{16R^4-R^4}{16}} = \frac{32R^4}{15R^4} \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{K}_{\mu\varepsilon\tau(\mathrm{M})}}{\mathrm{K}_{\sigma\tau\rho(\kappa o\iota\lambda)}} = \frac{32}{15}$$

Δ25)

Δ.1. Πρέπει:



$$\Sigma\vec{\tau}_{(A)}=0\Rightarrow T_\psi\frac{L}{2}-m_1g\frac{L}{4}-m_2g\frac{3L}{4}=0$$

$$\Rightarrow T_\psi=m_1g\frac{1}{2}+m_2g\frac{3}{2}$$

$$=5m_2g\frac{1}{2}+m_2g\frac{3}{2}$$

$$=4m_2g$$

$$=20\,N$$

Άρα $T=\dfrac{T_\psi}{\eta\mu 30^0}=\dfrac{20\,N}{1/2}=\underline{40\,N}$

Δ.2. Το μέτρο της αρχικής γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου θα το υπολογίσουμε από τη σχέση $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{\Sigma\tau_{(A)}}{I_{(A)}}$, όπου:

$$\Sigma\tau_{(A)}=m_1g\frac{L}{4}+m_2g\frac{3L}{4}$$

$$=5m_2g\frac{L}{4}+m_2g\frac{3L}{4}$$

$$=2m_2g$$

$$=10\,\text{N}\cdot m\quad(S.I)$$

και

$$I_{(A)}=I_{(A),AK}+I_{(A),KB}=I_{c.m,AK}+I_{c.m,KB}+m_1\left(\frac{L}{4}\right)^2+m_2\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2+\frac{1}{12}m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2+m_1\left(\frac{L}{4}\right)^2+m_2\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$=\frac{6}{12}m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2+5m_2\left(\frac{L}{4}\right)^2+9m_2\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16}+\frac{9}{16}\right)m_2L^2$$

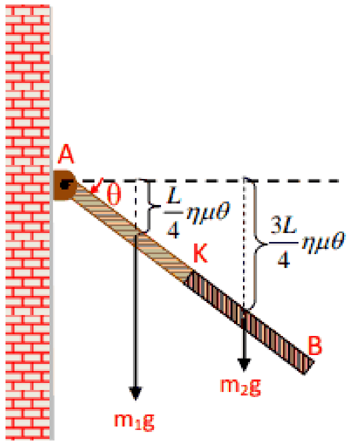
$$=m_2L^2$$

$$=0{,}5\,kg\cdot m^2$$

Άρα $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{\Sigma\tau_{(A)}}{I_{(A)}}=\dfrac{10\,N\cdot m}{0{,}5\,kg\cdot m^2}=\underline{20\,r/s^2}$

> Παρατήρηση: Επειδή
>
> $\alpha_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{\Sigma\tau_{(A)}}{I_{(A)}}=\dfrac{2m_2g}{m_2L^2}=\dfrac{2g}{L^2}=20\,r/s^2$
>
> η γωνιακή επιτάχυνση είναι ανεξάρτητη των μαζών.

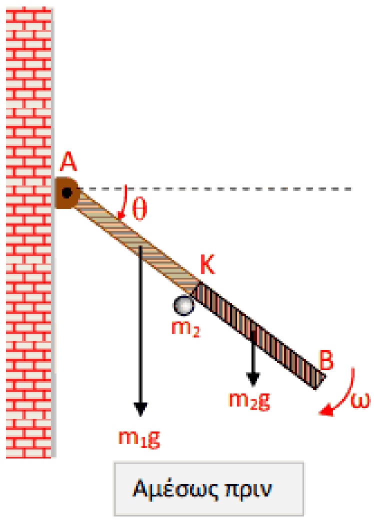
Δ.3. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση της ράβδου από την οριζόντια θέση ως τη θέση κατά την οποία έχει περιστραφεί κατά γωνία θ =30^0:

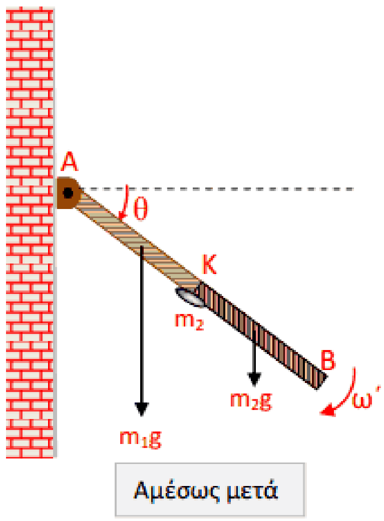


$$\frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2 = W_{w_1} + W_{w_2} = m_1 g\frac{L}{4}\eta\mu\theta + m_2 g\frac{3L}{4}\eta\mu\theta$$
$$= 5m_2 g\frac{L}{4}\eta\mu\theta + 3m_2 g\frac{L}{4}\eta\mu\theta$$
$$= 8m_2 g\frac{L}{4}\eta\mu\theta$$
$$= 2m_2 gL\eta\mu\theta$$
$$= 10\eta\mu 30^0 \quad (S.I)$$
$$= 5\,J$$

Άρα: $\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\omega^2 = 5 \qquad (S.I)$ ή $\omega = \sqrt{20}\ r/s$ και $\upsilon_B = \omega L = \sqrt{20}\ m/s$

Δ.4. Αμέσως πριν την κρούση είναι $\omega = \sqrt{20}\ r/s$





Στην πλαστική κρούση ράβδου-σφαιριδίου ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$\vec{L}_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{o\lambda,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \overset{+}{\Rightarrow} I_{(A)}\omega = \left[I_{(A)} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega'$$
$$\overset{(S.I)}{\Rightarrow} 0{,}5\sqrt{20} = \left[0{,}5 + 0{,}5\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\omega'$$
$$\Rightarrow \omega' = 0{,}8\sqrt{20}\ r/s$$

Αμέσως πριν την κρούση το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο είχε κινητική ενέργεια ίση με τη στροφική κινητική ενέργεια της ράβδου:

$$K_{ολ.αρχ.} = \frac{1}{2} I_{(A)} \omega^2 = \frac{1}{2}(0,5\,kg \cdot m^2)\left(\sqrt{20}\,r/s\right)^2 = 5\,J$$

Αμέσως μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος (συσσωμάτωμα ράβδου-σφαιριδίου) είναι:

$$K_{ολ.τελ.} = \frac{1}{2}\left[I_{(A)} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega'^2 \overset{(S.I)}{=} \frac{1}{2}\left[0,5 + 0,5\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(0,8\sqrt{20}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right](0,64 \cdot 20)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{5}}{8} \cdot \frac{64}{\cancel{100}} \cdot \cancel{20}$$

$$= 4\,J$$

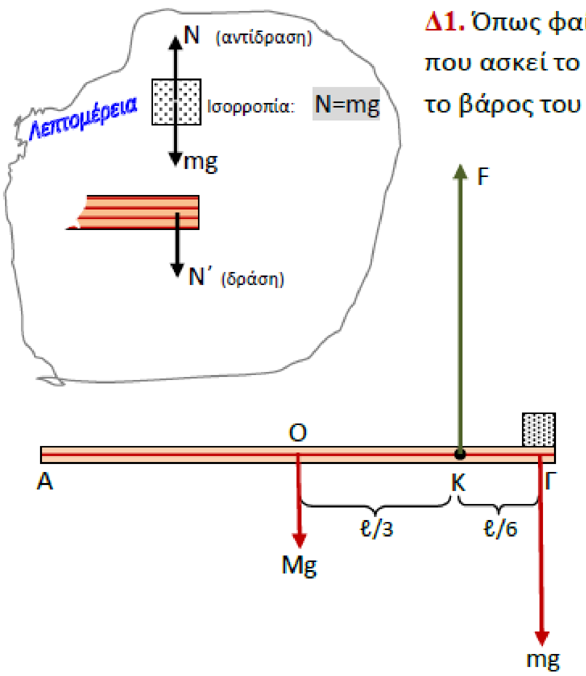
Επομένως, η απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση είναι:

$$E_{απωλ} = K_{ολ.πριν} - K_{ολ.μετά} = 5\,J - 4\,J = 1\,J$$

Και το ζητούμενο ποσοστό απωλειών:

$$\Pi = \frac{E_{απωλ}}{E_{ολ.πριν}} 100\% = \frac{1}{5} 100\% = \underline{20\%}$$

Δ26)



Δ1. Όπως φαίνεται στη λεπτομέρεια, η δύναμη N΄ που ασκεί το σώμα μάζας m στη ράβδο είναι ίση με το βάρος του (mg). Πρέπει να θεωρήσουμε το σώμα σημειακών διαστάσεων, ώστε η N΄ (=mg) να ενεργεί ακριβώς στο άκρο Γ της ράβδου. Αφού η ράβδος ισορροπεί, η ροπή αυτής της δύναμης καθώς και η ροπή του βάρους της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής, πρέπει να είναι αντίθετες. Δηλαδή:

$$Mg \cdot \frac{\ell}{3} = mg \cdot \frac{\ell}{6} \Leftrightarrow M = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \underline{M = 1,6\,kg}$$

Επίσης πρέπει $\Sigma F = 0$, δηλαδή:

$$F = (M+m)g = (3,2\,kg + 1,6\,kg)(10\,m/s^2)$$
$$= 48\,N$$

Δ2. Είναι:

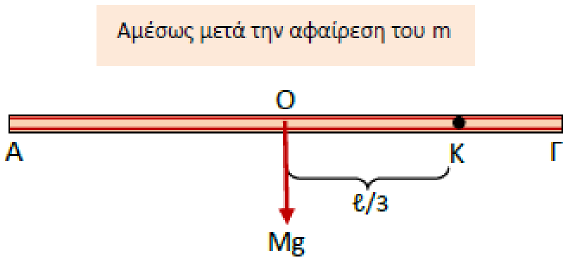
$$I_{(K)} = I_{(K)}^{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon} + I_{(K)}^{\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma} = M\cdot\frac{\ell^2}{12} + M\cdot\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{6}\right)^2$$

$$= M\ell^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\right) + m\ell^2\frac{1}{36} = \frac{7}{36}M\ell^2 + \frac{1}{36}m\ell^2 = \frac{\ell^2}{36}(7M+m)$$

$$\overset{(S.I)}{=} \frac{1,5^2}{36}(7\cdot 1,6+3,2) = \frac{1,5\cdot 1,5}{4\cdot \cancel{9}}(\cancel{9}\cdot 1,6) = 1,5\cdot 1,5\cdot 0,4 = 1,5\cdot 0,6$$

$$= \underline{0,9\ kg\cdot m^2}$$

Δ3. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου, αμέσως μετά την αφαίρεση του m, θα το υπολογίσουμε από τη σχέση

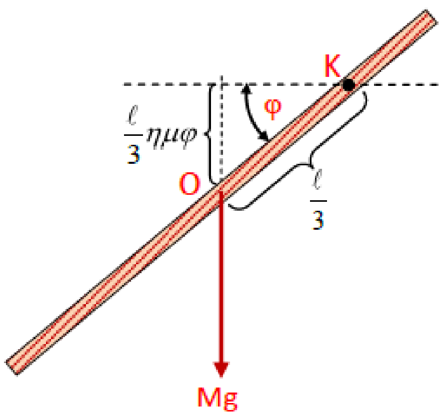


$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau_{(K)}}{I_{(K),\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon}}\text{, όπου: } \Sigma\tau_{(K)} = Mg\frac{\ell}{3}$$

και $I_{(K),\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon} = I_{c.m} + M\left(\frac{\ell}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{9}M\ell^2 = \frac{7}{36}M\ell^2$

Άρα $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau_{(K)}}{I_{(K)}} = \frac{\cancel{M}g\frac{\cancel{\ell}}{3}}{\frac{7}{36}\cancel{M}\ell^{\cancel{2}}} = \frac{36g}{21\ell} = \frac{4\cdot\cancel{9}\cdot 10\cancel{m}/s^2}{\cancel{3}\cdot 7\cdot(\cancel{3}\cdot 0,5\cancel{m})} = \frac{40}{3,5}r/s^2$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{80}{7}r/s^2$

Δ4.



Για τη στροφορμή ισχύει η σχέση:

$$L = I_{(K)\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon}\cdot\omega$$

Όπου

$$I_{(K)\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon} = \frac{7}{36}M\ell^2 \overset{(S.I)}{=} \frac{7}{36}1,6\cdot 1,5^2$$

$$= \frac{7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}_2\cdot\cancel{3}_2}\cancel{1,6}^{0,4}\cdot\cancel{1,5}\cdot\cancel{1,5} = \frac{7\cdot 0,4}{2\cdot 2}$$

$$= 0,7\ kg\cdot m^2$$

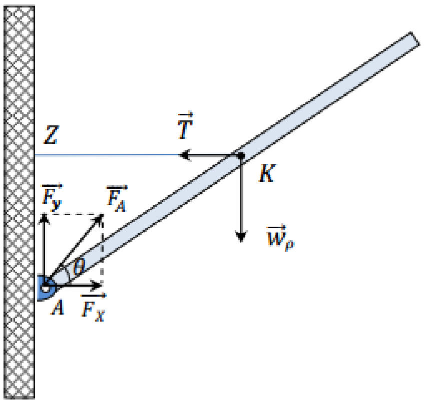
Χρειαζόμαστε την ω. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση της ράβδου από την οριζόντια θέση ως τη θέση όπου έχει περιστραφεί κατά τη γωνία φ:

$$\frac{1}{2}I_{(K)}\omega^2 = W_w \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{7}{36}\cancel{M}\ell^{\cancel{2}}\right)\omega^2 = \cancel{M}g\frac{\cancel{\ell}}{3}\eta\mu\varphi \text{ ή}$$

$$\omega^2 = \frac{2\cdot 36g\eta\mu\varphi}{3\cdot 7\cdot \ell} \overset{(S.I)}{=} \frac{2\cdot 12\cdot \cancel{10}\cdot\cancel{0,7}}{\cancel{7}\cdot 1,5} = \frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 4}{\cancel{3}\cdot 0,5} = 16 \text{ δηλαδή: } \omega = 4r/s.$$

Άρα: $L = I_{(K)\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon}\cdot\omega = 0,7\,kg\cdot m^2 \cdot 4r/s = \underline{2,8\ kg\cdot m^2/s}$

Δ27)



Δ1. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y = W_\rho \Rightarrow F_y = Mg \Rightarrow \boldsymbol{F_y = 56\ N}$

και $\Sigma\vec{\tau_A} = 0 \Rightarrow \vec{\tau_{W_\rho}} + \vec{\tau_T} + \vec{\tau_{F_x}} + \vec{\tau_{F_y}} = 0$

$\Rightarrow M\cdot g\cdot(\text{ZK}) - T\cdot(\text{AZ}) = 0$

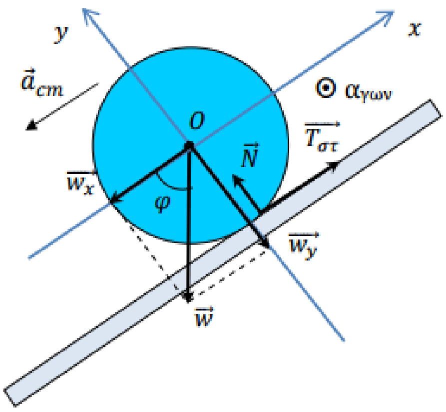
$\Rightarrow T = M\cdot g\cdot\frac{(\text{ZK})}{(\text{AZ})} \Rightarrow T = \frac{M\cdot g\cdot(AK)\cdot\eta\mu\varphi}{(AK)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}$

$\Rightarrow T = \frac{56\cdot 0,6}{0,8} \Rightarrow \boldsymbol{T = 42\ N}$

Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε: $\boldsymbol{F_x = 42\ N}$

και $F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F_A = \sqrt{42^2 + 56^2} \Rightarrow \boldsymbol{F_A = 70\ N}$

με $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{56}{42} = \frac{4}{3}$



Δ2. Αναλύουμε το βάρος της σφαίρας:

$w_x = mg\,\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $w_y = mg\,\eta\mu\varphi$

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$\Sigma F = m\,a_{cm} \Rightarrow mg\,\sigma\upsilon\nu\varphi - T_{\sigma\tau} = m\cdot a_{cm}$ (2)

Για τη στροφική κίνηση έχουμε:

$\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_{\sigma\tau}\cdot r = \frac{2}{5}mr^2\frac{a_{cm}}{r} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{2}{5}ma_{cm}$ (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε:

$mg\,\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{7}{5}ma_{cm} \Rightarrow 10\cdot 0,8 = \frac{7}{5}a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{40}{7}\ m/s^2$

Άρα: $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{r} = \frac{\frac{40}{7}}{\frac{1}{70}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 400\ rad/s^2$

Δ3. Στη σφαίρα ισχύει: $\overrightarrow{\Sigma F_y} = 0 \Rightarrow N = mg\,\eta\mu\varphi \Rightarrow N = 4\cdot 0,6 = 2,4\ N$

Όμως στη ράβδο ασκείται η N' που είναι η αντίδραση της N.

Οπότε: $N' = 2,4\ N$.

Η ράβδος ισορροπεί, οπότε ισχύει:

$$(\Sigma\tau)_A = 0 \Rightarrow W_\rho \frac{l}{2}\,\eta\mu\varphi - T\frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi + N'\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0$$

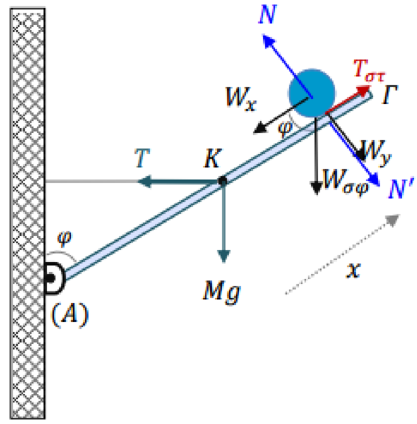
$$\Rightarrow 56 \cdot 0{,}6 - T \cdot 0{,}8 + 2{,}4(1 + x) = 0$$

$$\Rightarrow 56 \cdot 0{,}6 - T \cdot 0{,}8 + 2{,}4 + 2{,}4x = 0$$

$$\Rightarrow 33{,}6 - T \cdot 0{,}8 + 2{,}4 + 2{,}4x = 0$$

$$\Rightarrow 36 - 0{,}8T + 2{,}4x = 0$$

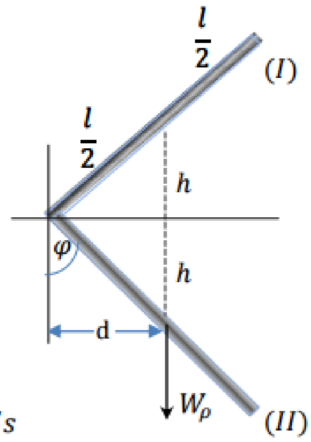
$$\Rightarrow T = 45 + 3x \text{ (S.I.)} \;\; \text{με } 0 \le x \le 1\, m.$$



Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη ράβδο δίνεται από τη σχέση:

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta o\upsilon} = \Sigma\tau \cdot \omega \quad (4) \qquad \text{Όμως } \; \Sigma\tau = W_\rho \mathrm{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma\tau = W_\rho \frac{l}{2}\,\eta\mu\varphi \Rightarrow \Sigma\tau = 56 \cdot \frac{2}{2} \cdot 0{,}6 = 33{,}6\; N \cdot m$$



Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από τη θέση (I) στη θέση (II) παίρνουμε:

$K_T - K_A = W w_\rho \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} I_\rho \omega_\tau^2 = mg2h, \;\; \text{όπου } h = \frac{l}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0{,}8$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5{,}6 \cdot 4\omega_\tau^2 = 5{,}6 \cdot 10 \cdot 1{,}6 \Rightarrow \omega_\tau^2 = \frac{3}{2}16 \Rightarrow \omega_\tau = 2\sqrt{6}\; r/s$$

$$\text{Τέλος από τη σχέση (4): } \left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_{\rho\alpha\beta\delta} = 33{,}6 \cdot 2\sqrt{6} = 67{,}2\sqrt{6}\; J/s$$

Δ5. Μετά την κρούση οι ράβδοι κινούνται μαζί.

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = I_\rho + I'_\rho = \frac{1}{3}Ml^2 + \frac{1}{3}3Ml^2 = \frac{4}{3}Ml^2$$

Από την **Αρχή Διατήρησης Στροφορμής** για την κρούση των ράβδων:

$$I_\rho \cdot \omega_\tau = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \cdot \omega' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{I_p}{I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}}\,\omega_\tau = \frac{\frac{1}{3}Ml^2}{\frac{4}{3}Ml^2}\,\omega_\tau = \frac{1}{4}\omega_\tau \Rightarrow \omega' = \frac{1}{4}\omega_\tau \quad (5)$$

$$\text{Όμως } \; \pi\% = \frac{E_{A\Pi\Omega\Lambda}}{K_{\Pi PIN}}100\% = \frac{K_{\Pi PIN} - K_{META}}{K_{\Pi PIN}}100\% \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\omega_\tau^2 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}Ml^2\frac{1}{16}\,\omega_\tau^2}{\frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\omega_\tau^2}100\% = \frac{1 - \frac{4}{16}}{1}100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = 75\%$$

Δ28)

Δ1. $(KO) = (KB) - (OB) = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{4} \Rightarrow (KO) = \frac{1}{4}\,m$.

$(AO) = (AB) - (OB) = \ell - \frac{\ell}{4} = \frac{3\ell}{4} \Rightarrow (AO) = \frac{3}{4}\,m$

Για τη ροπή αδράνειας της ράβδου με τη βοήθεια του θεωρήματος Steiner έχουμε:

$I_\rho = I_{cm} + M\cdot(KO)^2 \Rightarrow I_\rho = \frac{1}{12}\cdot M\cdot\ell^2 + M\cdot(KO)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_\rho = \frac{1}{12}\cdot 3\cdot 1^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow I_\rho = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \Rightarrow I_\rho = \frac{7}{16}\,Kgm^2$.

Έτσι η ροπή αδράνεια I του συστήματος ράβδου – σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι:

$I = I_\rho + I_{m_1} + I_{m_2} \Rightarrow I = I_\rho + m_1\cdot(KO)^2 + m_2\cdot(AO)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \frac{7}{16} + 1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{7}{16} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \Rightarrow \mathbf{I = \frac{17}{16}\,Kgm^2}$.

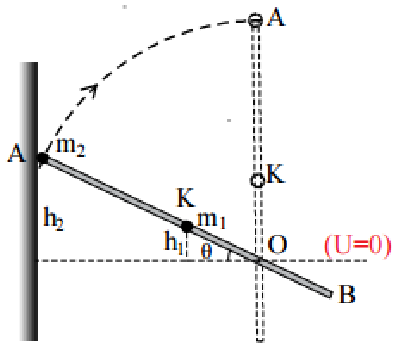
Δ2. Βρίσκουμε εκείνη την τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω_2, έτσι ώστε το σύστημα ράβδου – σφαιριδίων να φθάσει στην κατακόρυφη θέση και να σταματήσει.

Ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας (U = 0) το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από τον άξονα περιστροφής Ο.

Είναι:

$h_1 = (KO)\cdot ημθ = \frac{1}{4}\cdot 0{,}83 \Rightarrow h_1 = \frac{0{,}83}{4}\,m$

και $h_2 = (AO)\cdot ημθ = \frac{3}{4}\cdot 0{,}83 \Rightarrow h_2 = \frac{2{,}49}{4}\,m$



Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$K_{αρχ} + U_{αρχ} = \cancel{K_{τελ}} + U_{τελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_2^2 + m_1\cdot g\cdot h_1 + M\cdot g\cdot h_1 + m_2\cdot g\cdot h_2 =$
$= m_1\cdot g\cdot(KO) + M\cdot g\cdot(KO) + m_2\cdot g\cdot(AO) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{16}\cdot\omega_2^2 + 1\cdot 10\cdot\frac{0{,}83}{4} + 3\cdot 10\cdot\frac{0{,}83}{4} + 1\cdot 10\cdot\frac{2{,}49}{4} =$

$= 1\cdot 10\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot 10\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot 10\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow$

$\frac{17}{32}\cdot\omega_2^2 + \frac{8{,}3}{4} + \frac{24{,}9}{4} + \frac{24{,}9}{4} = \frac{10}{4} + \frac{30}{4} + \frac{30}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{17}{32}\cdot\omega_2^2 + \frac{58{,}1}{4} = \frac{70}{4} \Rightarrow \frac{17}{32}\cdot\omega_2^2 = \frac{11{,}9}{4} \Rightarrow \frac{17}{8}\cdot\omega_2^2 = 11{,}9 \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{95{,}2}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = \sqrt{5{,}6}\ \text{rad/s}}$.

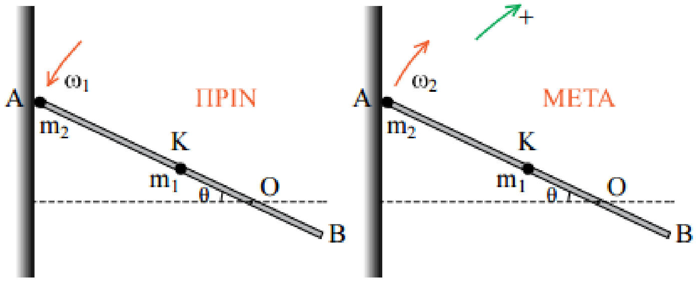
<u>Παρατήρηση</u>: Με την τιμή της ω_2 που υπολογίσαμε, δεν γίνεται ανακύκλωση γιατί το σύστημα σταματά στην κατακόρυφη θέση. Για ανακύκλωση πρέπει η ω_2 να είναι λίγο μεγαλύτερη από $\sqrt{5{,}6}$ rad/s. Συνηθίζουμε όμως να λέμε ότι με αυτή την τιμή της ω_2 εκτελεί οριακά ανακύκλωση.

Δ3. Έστω ότι πριν τη κρούση το σύστημα χτυπάει στον κατακόρυφο τοίχο με γωνιακή ταχύτητα ω_1. Από το ποσοστό απωλειών κινητικής ενέργειας που δόθηκε έχουμε:

$$\frac{K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}}100\% = 75\% \Rightarrow \frac{K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{75}{100} \Rightarrow \frac{K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$3K_{\pi\rho\iota\nu} = 4K_{\pi\rho\iota\nu} - 4K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow K_{\pi\rho\iota\nu} = 4K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_1^2 = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 4\omega_2^2 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \quad (1)$$



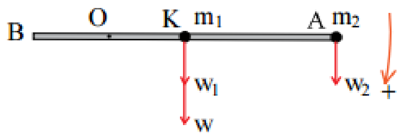
Έτσι η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος κατά την κρούση με τον τοίχο ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$d\vec{L} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} \Rightarrow dL = I\cdot\omega_2 - (-I\cdot\omega_1) \Rightarrow dL = I\cdot(\omega_1+\omega_2) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} dL = I\cdot(2\omega_2+\omega_2) \Rightarrow dL = 3\cdot I\cdot\omega_2 \Rightarrow dL = 3\cdot\frac{17}{16}\cdot\sqrt{5{,}6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{dL = \frac{51\sqrt{5{,}6}}{16}\ Kgm^2/s}.$$

Δ4. Από το θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του συστήματος έχουμε:



$$\Sigma\tau_{(O)} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w\cdot(KO) + w_1\cdot(KO) + w_2\cdot(AO) = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\cdot g\cdot(KO) + m_1\cdot g\cdot(KO) + m_2\cdot g\cdot(AO) = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot10\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot10\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot10\cdot\frac{3}{4} = \frac{17}{16}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{4} + \frac{10}{4} + \frac{30}{4} = \frac{17}{16}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{70}{4} = \frac{17}{16}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{280}{17}\ \text{rad/s}^2.$$

Έτσι το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της m_2 είναι:

$$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = I_{m_2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = m_2\cdot(AO)^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{280}{17} \Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = \frac{9}{16}\cdot\frac{280}{17} \Rightarrow$$

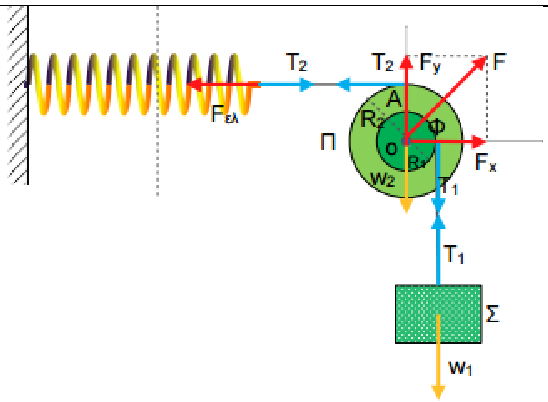
$$\Rightarrow \left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = \frac{9}{16}\cdot\frac{280}{17} \Rightarrow \mathbf{\left|\frac{dL}{dt}\right|_{m_2} = \frac{630}{68}\,Kgm^2/s^2}$$

Δ29)

Δ1 Από την ισορροπία του σώματος Σ στον άξονα y έχουμε: $\Sigma F_y=0 \Rightarrow w_1-T_1=0 \Rightarrow w_1=T_1 \Rightarrow$
$T_1=mg=50\cdot 10 \Rightarrow$ $T_1=500$ N

Για το στερεό Π επειδή ισορροπεί ισχύει:
$\Sigma\tau_{(o)}=0 \Rightarrow T_1R_1-T_2R_2=0 \Rightarrow T_1R_1=T_2R_2 \Rightarrow$
$T_1R_1=T_2\cdot 2R_1 \Rightarrow T_2=T_1/2 \Rightarrow T_2=500/2 \Rightarrow T_2=250$ N

Για την ισορροπία του ελατηρίου έχουμε:
$\Sigma F=0 \Rightarrow T_2-F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=0 \Rightarrow$ $\mathbf{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau}=250\ N}$



Δ2. Το στερεό Π ισορροπεί, συνεπώς για τους άξονες x και y ισχύουν οι σχέσεις αντίστοιχα:
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_x-T_2=0 \Rightarrow F_x=T_2 \Rightarrow F_x=250$ N
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_y-T_1-w_2=0 \Rightarrow F_y=T_1+w_2 \Rightarrow F_y=500+250 \Rightarrow$
$F_y=750$ N

$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{250^2+750^2} \Rightarrow F=250\sqrt{10}N$

και για τη γωνία φ ισχύει: $\varepsilon\varphi\varphi=F_y/F_x=750/250=3$

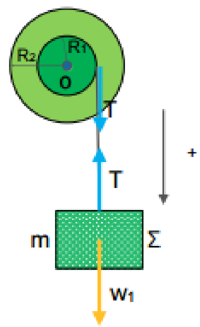
Δ3. Επειδή το κατακόρυφο νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει η ταχύτητα υ_{cm} της μεταφορικής κίνησης του σώματος Σ και η γωνιακή ταχύτητα ω του στερεού συνδέονται με τη σχέση: $\upsilon_{cm}=\omega R_1$ (1)

και για τις επιταχύνσεις ισχύει η σχέση: $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1$ (2)

Από τον θεμελιώδη νόμο για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ προκύπτει:
$\Sigma F_y=m\alpha_{cm} \Rightarrow mg-T=m\alpha_{cm} \Rightarrow mg-T=m\,\alpha_{\gamma\omega\nu}R_1 \Rightarrow 50\cdot 10-T=50\,\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot 0{,}2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 500-T=10\,\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

Από τον θεμελιώδη νόμο για την στροφική κίνηση του στερεού έχουμε:
$\Sigma\tau_{(o)}=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR_1=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T\cdot 0{,}2=1\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T=5\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (4)

Η (3) λόγω της (4) γίνεται:
$500-5\alpha_{\gamma\omega\nu}=10\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 15\alpha_{\gamma\omega\nu}=500 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=500/15 \Rightarrow$ $\mathbf{\alpha_{\gamma\omega\nu}=100/3\ rad/s^2}$



Δ4. από την (3) έχουμε $500-T=10\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 500-T=10\cdot(100/3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 500-T=1000/3 \Rightarrow T=500-1000/3 \Rightarrow T=(1500-1000)/3 \Rightarrow$
$\Rightarrow T=500/3$ N

Τη στιγμή t = 0,9 s η γωνιακή ταχύτητα το στερεού είναι:

$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t=\frac{100}{3}0{,}9=\frac{90}{3}=30rad/s$

Την ίδια χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη στροφική κίνηση του στερεού (στιγμιαία ισχύς της Στ) είναι:

$$\frac{dK}{dt}=\Sigma\tau_{(o)}\cdot\omega=T\cdot R_1\cdot\omega=\frac{500}{3}\cdot 0{,}2\cdot 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt}=1000\ \ J/s$$